ÜBER DIE SYMMETRIE DES PRÄDIKATES „RELATIV PRIM". II

Von

Shinjiro MORI

(Eingegangen am 10, Dez. 1950)

In einer früheren Arbeit[1] habe ich das Strukturproblem für die allgemeinen kommutativen Ringe, in denen das Prädikat „relativ prim" symmetrisch ist, in Angriff genommen. Es muss nun unsere nächste Aufgabe sein, die Eigenschaften der Ideale der oben genannten Ringe kennen zu lernen. Dabei müssen wir die Definition für ein starkes Primärideal teilweise ändern, und überdies ist anzunehmen, dass jedes Halbprimideal mindestens einen Primteiler besitzt, und dass jede Teilerkette der Primideale im Endlichen abbricht.

I. Reduction der Ideale durch Primärideale.

Einen Struktursatz über die oben genannten Ringe stellen wir der Reduktiontheorie von Idealen voran.

Satz 1. *Ist $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring,*[2] *in dem das Prädikat „relativ prim" symmetrisch ist, und bedeutet $\mathfrak{a}$ ein von (o) und $\mathfrak{R}$ verschiedenes Ideal von $\mathfrak{R}$, so ist das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Halbprimideal von $\mathfrak{R}$ verschieden.*

Nehmen wir nämlich an, dass das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Halbprimideal $\mathfrak{h}$ mit $\mathfrak{R}$ übereinstimmt, so folgt $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{a}$, da $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{R}$ verschieden ist. Ist r irgend ein Element von $\mathfrak{R}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{a}$, so soll wegen der Eigenschaft von[3] $\mathfrak{R}$ $(r)=(r)\mathfrak{R}$ sein. Demnach ergibt sich $r=rr'=rr'^2=\ldots$ für ein Element r'. Aus $\mathfrak{h}=\mathfrak{R}$ folgt daraus $r \in \mathfrak{a}$, was unserer Annahme widerspricht.

Für ein tieferes Eindringen in die Eigenschaft der Ideale soll die Existenz eines Primteilers der Ideale untersucht werden. Das Problem ist jedoch schwer, obgleich bedeutsame Abhandlungen über diesen Gegenstand erschienen sind. Wir fügen nur die Äquivalenz der folgenden Annahmen bei.

I. *In $\mathfrak{R}$ besitzt jedes Halbprimideal* $(\neq(o), \neq\mathfrak{R})$ *mindestens einen Primidealteiler* $(\neq\mathfrak{R})$.

---

1) Über die Symmetrie des Prädikates „relative prim". Journal of Sci. of the Hiroshima Univ. 14 (1950), 102.

2) Wir schliesen den Ring aus, welcher kein Ideal ausser (o) und $\mathfrak{R}$ besitzt.

3) Für den Ring $\mathfrak{R}$ gilt:

Wenn $(r)\mathfrak{R}\neq 0$ ist, so wird $(r)\mathfrak{R}=(r)$, und wenn $(r)\mathfrak{R}=0$ ist, so gehört r zu allen von Null verschiedenen Idealen. loc. cit. 103.