

Teilerfremde und relativ prime Ideale

Von

Shinjiro MORI

(Eingegangen am 30. Mai 1950)

廣島市東千田町
廣島文理科大学数学教員

Abgesehen davon, ob der kommutative Ring $\mathfrak{R}$ das Einselement besitzt, oder nicht, heissen zwei Ideale a und b in $\mathfrak{R}$ *teilerfremd*, wenn ihr grösster gemeinsamer Teiler gleich $\mathfrak{R}$ ist, nämlich $(a, b) = \mathfrak{R}$ ist. Andererseits nennen wir b *relativ prim* zu a ($\neq (0)$), wenn $a = a : b$ ist. Bekanntlich ist aber das Prädikat "relativ prim" nicht symmetrisch, und in allgemeineren Fällen sind auch die beiden Prädikate "teilerfremd" und "relativ prim" nicht gleichwertig.

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit die Eigenschaften der Ringe, in welchen die beiden Prädikate "teilerfremd" und "relativ prim" gleichbedeutend sind, aufzudecken. Um Missverständnisse zu vermeiden stellen wir wieder die Hauptaufgabe unserer späteren Ausführungen als folgendes Problem zusammen:

Von welcher Art ist der kommutative Ring, in welchem die Beziehung $(a, b) = \mathfrak{R}$ aus $a = a : b$, oder $b = b : a$ folgt, und umgekehrt aus $(a, b) = \mathfrak{R}$ die Beziehung $a = a : b$, oder $b = b : a$ folgt?

Endlich ist noch eine Bemerkung zuzufügen:

Können wir vermuten, dass im idempotenten kommutativen Ring kein Totalnullteiler existiert, lassen sich die Eigenschaften des in Frage stehenden Ringes in noch einfacherer Form darstellen.

I. Fall. Kommutativer Ring mit Einselement.

Um den Zusammenhang der Prädikate "teilerfremd" und "relativ prim" zu erkennen, stellen wir den folgenden Satz an die Spitze.

Satz 1. *Im kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ mit Einselement finden die beiden Prädikate "teilerfremd" und "relativ prim" dann und nur dann dieselbe Deutung, wenn dem Ring $\mathfrak{R}$ folgende Eigenschaft zukommt:*

Für jedes Halbprimideal $\mathfrak{h}$ ($\neq \mathfrak{R}$), welches ein echter Teiler eines Ideals a ($\neq (0)$) ist, lässt sich ein Element r , so wählen, dass $r\mathfrak{h} \subseteq a$, $r \notin a$ ist.

Es gelte jetzt die Annahme, dass beide Definitionen in $\mathfrak{R}$ gleichwertig sind. Dann, aus $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{h} \supset a$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{h} : a$ folgt $a + a : \mathfrak{h}$; also ist die Eigenschaft notwendig.