Über ganzzahlige quadratische Gleichungen, die eine reduzierte Zahl als Wurzel besitzen.

Von

Shinjiro Mori.

(Eingegangen am 30 Nov., 1948)

Bekanntlich ist *die Kettenbruchentwickelung der reellen positiven Wurzeln einer ganzzahligen quadratischen Gleichung periodisch.*(1) Für diesen klassischen Lagrange'schen Satz gebe ich im folgenden einen elementaren Beweis, mit dem ich eine neue Definition für reduzierte Zahl verbinde, und aus dieser Überlegung gewinne ich zugleich einen Satz über die Lösung der Pell'schen Gleichung.

1. Beweis des Lagrange'schen Satzes.

Sei $f(x)=ax^2+bx+c=0$ eine ganzzahlge primitive Gleichung mit positiver Diskriminante $D=b^2-4ac>0$, jedoch eine Wurzel positiv, und also $a>0$. Nun können wir, unter (x) die Matrix $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ verstehend, die obige Gleichung auch in der Form

$$(1) \qquad (x)'\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}(x)=0$$

umschreiben, und indem wir auf diese Formel die Transformation

$$(2) \qquad x=k+\frac{1}{x'}, \quad \text{oder} \quad (x)=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(x')$$

anwenden, ergibt sich

$$(3) \qquad (x')'\begin{pmatrix} 2a_1 & b_1 \\ b_1 & 2c_1 \end{pmatrix}(x')=0, \quad \text{oder} \quad a_1x'^2+b_1x'+c_1=0,$$

worin nach $\begin{pmatrix} 2a_1 & b_1 \\ b_1 & 2c_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(4) \qquad a_1=ak^2+bk+c=f(k), \quad b_1=2ak+b=f'(k), \quad c_1=a,$$

$$(5) \qquad b_1^2-4a_1c_1=b^2-4ac=D>0.$$

Hierzu nehmen wir noch Folgendes an; x ist eine positive Wurzel von (I) und k eine positive ganze Zahl, oder Null, so dass x zwischen k und $k+1$ liegt. Daher sind a_1, b_1, c_1, auch ganze Zahlen. Wenn aber $k=0$ ist, so muss nach (2) die positive Wurzel x' von (3) grösser als 1 sein. Damit werden wir uns weiterhin auf die Betrachtung vom Falle $k\geqq 1$ beschränken dürfen.

Da die Funktion $y=f(x)=ax^2+bx+c$ bei der vorerwähnten Annahme eine Parabel darstellt, so können wir nach dem Zeichen von c drei Fälle unterscheiden

1. $f(0)=c>0, \quad k>\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a},$

2. $f(0)=c>0, \quad k<\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a},$

3. $f(0)=c<0.$

(1) H. Weber, Algebra 1, S. 431.