IDEALTHEORIE IN EINEM SPEZIELLEN UNENDLICHEN ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPER

von

Noboru NAKANO

(Eingegangen am 30. Sep. 1952)

Bei der Theorie des unendlichen algebraischen Zahlkörpers kann die Tatsache auftreten, dass ein Primideal $\mathfrak{p}$ idempotent ist.[1] Es fragt sich nun, ob ein unendlicher algebraischer Zahlkörper existiert, welcher kein idempotentes Primideal ausser Einheits- und Null-idealen hat. Der Zweck dieser Arbeit ist, die Existenz dieses Körpers nachzuweisen und sich mit Idealtheorie in diesem speziellen Körper zu beschäftigen.

Im ersten Paragraphen wird vor allem durch ein Beispiel gezeigt, dass die gewünschte Art von unendlichen algebraischen Zahlkörpern existieren kann. Anschliessend wird im § 2 der spezielle unendliche algebraische Körper $\mathfrak{K}=\{\mathfrak{K}_\nu\}$ eingeführt, der die folgenden Bedingungen erfüllt:

I) *Für die Zerlegung einer beliebigen natürlichen Primzahl p in $\mathfrak{K}_\nu$: $p=\mathfrak{p}_{\nu 1}^{e_{\nu 1}}\mathfrak{p}_{\nu 2}^{e_{\nu 2}}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{\nu\lambda_\nu}^{e_{\nu\lambda_\nu}}$, ist jeder Exponent $e_{\nu i}$ $(i=1, 2, \ldots, \lambda_\nu)$ für hinreichend grosses ν konstant.*

II) *Aus der Körperfolge $\{\mathfrak{K}_\nu\}$ können wir eine Teilfolge $\{\mathfrak{K}_\mu\}$ so auswählen, dass jedes Primideal $\mathfrak{p}_{\mu i}$ $(i=1, 2, \ldots, \lambda_\mu)$ von $p=\mathfrak{p}_{\mu 1}^{e_{\mu 1}}\mathfrak{p}_{\mu 2}^{e_{\mu 2}}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{\mu\lambda_\mu}^{e_{\mu\lambda_\mu}}$ in mindestens zwei teilerfremde Primärfaktoren beim Übergang von $\mathfrak{K}_\mu$ zu $\mathfrak{K}_{\mu+1}$ zerfällt.*

Im folgenden benützen wir nur diesen Körper als den Grundkörper für unsere durchgeführten Untersuchungen.

In § 2 wollen wir auch zeigen, dass für ein Primideal[2] $\mathfrak{p}$ und die von $\mathfrak{p}$ verschiedenen Primideale $\mathfrak{p}_{(\iota)}$, $\mathfrak{p}\supset\bigcap_\iota\mathfrak{p}_{(\iota)}$ bestehen kann, und dass die Beziehungen $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}\supset\bigcap_\iota\mathfrak{p}_{(\iota)}$ gleichbedeutend sind, wenn $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_{(\iota)}$ die Teiler von $\mathfrak{a}$ sind. In § 3 stellen wir eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, dass zu einem gegebenen Ideale $\mathfrak{a}$ und einem beliebigen Idealteiler $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$ stets ein Ideal $\mathfrak{c}$, so dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ist, existiert. Im letzten Paragraphen lässt es sich zeigen, dass ein bewertungstheoretisches „*endliches*" Ideal[3]

1) Siehe etwa E. Stiemke: „Über unendliche algebraische Zahlkörper," Math. Zeit. 25 (1926) Kapitel 6. Die Stiemkesche Arbeit wird in Zukunft mit „Stiemke" zitiert.

2) Im folgenden verstehen wir unter Primideal stets ein von Einheits- und Null-ideal verschiedenes Primideal.

3) Vgl. W. Krull; „Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern," Math. Zeit., Bd. 29, 1929, s. 50. Diese Krullsche Arbeit wird mit „Krull (1)" zitiert.