ÜBER KOMMUTATIVE RINGE MIT DER TEILERKETTENBEDINGUNG FÜR HALBPRIMIDEALE

Von

Shinziro MORI

(Eingegangen am 10, Mai 1952)

Die forliegende Arbeit soll eine Fortführung und Ergänzung der Abhandlung „*Zerlegung der Ideale durch schwache Primärideale*"[1] darstellen. Dort würde für den kommutativen Grundring $\mathfrak{R}$ vorausgesetzt, dass in ihm die Teilerkettenbedingung für Primideale erfüllt ist. Mit Hilfe der gemachten Annahme gelangt man dann zum Ergebnisse:

Jedes Ideal von $\mathfrak{R}$ wird dann und nur dann als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen dargestellt, wenn $\mathfrak{R}$ die folgenden Eigenschaften hat:

1) *Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal von $\mathfrak{R}$, und ist $\mathfrak{a}:(b)\subset\mathfrak{a}:(b^2)\subset\cdots$ eine Kette der Idealquotienten für ein Element b von $\mathfrak{R}$, so bricht diese Kette nach endlich vielen Gliedern ab, und von einem gewissen n ab sind alle Glieder gleich einem Ideal $\mathfrak{r}$.*

2) *Die Anzahl der in dieser Weise erhaltenen Ideale $\mathfrak{r}$ ist endlich, soweit $\mathfrak{a}$ fixiert ist.*

Im folgenden sollen nun die Beziehungen zwischen den obig ausgesprochenen Bedingungen und der Zerlegbarkeit der Ideale noch tiefer untersucht werden. Zuerst behandeln wir kurz die Zerlegbarkeit der Ideale im kommutativen Ring, in dem die Teilerketten-bedingung für Halbprimideale erfüllt ist. Dabei ziehen wir aber nicht nur die Zerlegung durch endlich viele starke Primärideale in Betracht, sondern auch die Zerlegung durch schwache Primärideale. Mit Hilfe dieser Ergebnisse gelingt es uns, notwendige und hinreichende Kennzeichen dafür zu gewinnen, wann jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellbar ist und wann nicht.[2]

1) Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. 12 (1942), I. Diese Arbeit erschient in der Japanischen Sprache und ihr Umriss ist durch Prof. T. Nakayama in Mathematical Reviews 9 (1948) skizziert worden.

2) In unserer ganzen Arbeit wird die Existenz des Einheits-elementes vom Ring gar nicht vorausgesetzt. Dies Ergebnis ist hiermit noch nicht gefunden worden, trotzdem I. S. Cohen geschrieben hat, dass W. Krull dies Problem schon gelöst hat. Mathematical Reviews 9, No. 10 (1948).