JOURNAL OF SCIENCE OF THE HIROSHIMA UNIVERSITY, SER. A, VOL. 17, NO. 1, AUG., 1953

Über Idempotente Ideale in Unendlichen Algebraischen Zahlkörpern

Von

Noboru NAKANO

(Eingegangen am 31, Januar 1953)

In seiner Arbeit[1] hat Herr E. Stiemke die Existenz eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers gezeigt, in dem nur endlich viele Primideale[2] idempotent sind. Vor kurzem habe ich dagegen ein Beispiel[3] eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers angeführt, in dem kein von Null- und Einheitsideal verschiedenes Primideal idempotent ist. In allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlkörpern ist es möglich, dass unendlich viele idempotente Primideale existieren. Darauf erhebt sich die Frage: Welche Bedingungen sind notwendig und hinreichend, dafür, dass ein Primideal $\mathfrak{p}$ idempotent ist? und diesem Problem ist diese Arbeit gewidmet.

Zunächst beweise ich, dass ein Primideal $\mathfrak{p}$ dann und nur dann idempotent ist, wenn ein Primideal $\mathfrak{p}_\nu$ aus endlichem algebraischem Zahlkörper $\mathfrak{R}_\nu$ nach $\mathfrak{p}$ unendlich verzweigt. Ferner zeige ich, dass für $m \geqq 2$ nicht die Beziechung

$$\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}^{m-1} \supset \mathfrak{p}^m = \mathfrak{p}^{m+1} = \cdots$$

gilt. Zweitens behaupte ich, dass irgendeine aus folgenden drei Bedingungen notwendig und hinreichend dafür ist, dass $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ ist,

1) $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}^2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}^M \cap \cdots = (0)$

2) $\mathfrak{p}^\lambda \cap \mathfrak{R}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^\lambda \qquad (\lambda \geqq 2,\ \nu \geqq N)$

3) die zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale sind sämtlich Potenzen von $\mathfrak{p}$.

Endlich zeige ich, dass ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges idempotentes Primärideal $\mathfrak{q}$ gleich $\mathfrak{p}$ ist und dass jedes Ideal $\mathfrak{a}$ dann und nur dann idempotent ist, wenn seine sämtlichen isolierten Primärkomponenten idempotent sind. Hieraus ergibt sich schliesslich, dass ein Ideal $\mathfrak{a}$ dann und nur dann idempotent ist,

1) E. Stiemke; „Über unendliche algebraische Zahlkörper." Math. Zeit. 25 (1926), zitiert mit „Stiemke (1)." S. 38-39, Kapitel 6.

2) Im folgenden verstehen wir unter Primideal stets ein von Einheits- und Null-ideal verschiedenes Primideal.

3) N. Nakano; „Idealtheorie in einem spezialen unendlichen algebraischen Zahlkörper." Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. Vol. 16, No. 3, zitiert mit „Nakano (1)".