JOURNAL OF SCIENCE OF THE HIROSHIMA UNIVERSITY, SER. A, VOL. 18, NO. 3, MARCH, 1955

Über den Primäridealquotienten im Unendlichen Algebraischen Zahlkörper

Von

Noboru NAKANO

(Eingegangen am 30. September 1954)

Im allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlkörper können wir sämtliche zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ [1] gehörige Primärideale in vier Arten einteilen.[2] Vor kurzem habe ich über die Eigenschaften von Primäridealen von jeder Art, und über den Zusammenhang zwischen Primäridealen von verschiedenen Arten [3] und ferner über Produkt von Primäridealen von irgend zwei Arten [4] Untersuchungen gemacht. Das Ziel dieser Arbeit ist es zu zeigen dass, wenn $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ ist, wir es mit der Struktur von Primäridealquotient $\mathfrak{q} : \mathfrak{q}'$ und mit der Existenz von $\mathfrak{q}''$ von der Art, dass $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ ist, zu tun haben.

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{K}$ einen unendlichen algebraischen Zahlkörper, welcher als der Vereinigungskörper von abzählbar unendlich vielen algebraischen Zahlkörpern $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{K}_\nu \subset \mathfrak{K}_{\nu+1} \subset \cdots$ definiert wird. Ist $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}_\nu$ resp. die Hauptordnung aus $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_\nu$, so ist $\mathfrak{O}$ die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{O}_1 \subseteqq \mathfrak{O}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{O}_\nu \subseteqq \mathfrak{O}_{\nu+1} \subseteqq \cdots$.

In § 1 wollen wir den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{q} : \mathfrak{q}'$ und eben erwähntem $\mathfrak{q}''$ untersuchen. In § 2 lässt sich zeigen, dass jeder Primäridealquotient $\mathfrak{q} : \mathfrak{q}'$ irgendeine von folgenden zwei Folgen besitzt:

$$\cdots \subseteqq \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} : \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu} \subseteqq \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}} : \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e'_{\nu+1}} \subseteqq \cdots\cdots \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda} : \mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda} \subseteqq \cdots\cdots,$$

$$\cdots \subseteqq \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1} : \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu} \subseteqq \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}+1} : \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e'_{\nu+1}} \subseteqq \cdots\cdots \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda+1} : \mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda} \subseteqq \cdots\cdots,$$

wobei $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ und $\mathfrak{q}' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$ sind. In § 3 stelln wir eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, dass zu einem gegebenen Primärideal $\mathfrak{q}$ und einem Primäridealteiler $\mathfrak{q}'$ von $\mathfrak{q}$ ein drittes $\mathfrak{q}''$, dass $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ genügt, existiert. Weiter

---

1) Im folgenden verstehen wir unter Primideal stets ein von Einheits- und Null-ideal verschiedenes Primideal.

2), 3) N. Nakano; „Über die Einteilung von Primäridealen im unendlichen algebraischen Zahlkörper", Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. Vol. 17, No. 3, 1954, zitiert mit „Nakano (1)".

4) N. Nakano; „Über Produkt von Primäridealen im unendlichen algebraischen Zahlkörper", Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. Vol. 18, No. 2, 1954, zitiert mit „Nakano (2)".