JOURNAL OF SCIENCE OF THE HIROSHIMA UNIVERSITY, SER. A, VOL. 19, NO. 2, NOVEMBER, 1955

Über die Produkte und Quotienten von Idealen in Unendlichen Algebraischen Zahlkörpern

Von

Noboru NAKANO

(Eingegangen am 31, Mai 1955)

Wenn $\mathfrak{K}$ ein allgemeiner unendlicher algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{O}$ die Hauptordnung von $\mathfrak{K}$ ist, so gelten in $\mathfrak{O}$ die folgenden Bedingungen:

I. $\mathfrak{O}$ *ist kommutativer Integritätsbereich mit Einselement.*

II. Jedes von $\mathfrak{O}$ *verschiedene Ideal ist durch mindestens ein Primideal teilbar und alle von Nullideal verschiedenen Primideale sind teilerlos.*[1)]

III. $\mathfrak{O}$ *ist ganz-abgeschlossen im Quotientenkörper* $\mathfrak{K}$.[2)]

In $\mathfrak{O}$ ist aber der Teilerkettensatz nicht immer gültig. Danach kann ein von Einheits- und Null-ideal verschiedenes Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{O}$ idempotent sein und $\mathfrak{a}$ kann nicht immer endlich viele Primidealteiler besitzen. Unter diesen Umständen haben wir oft $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$, obwohl $\mathfrak{a}$ ein von Nullideal verschiedenes Ideal und $\mathfrak{b}$ ein von $\mathfrak{O}$ verschiedener Teiler von $\mathfrak{a}$ ist. Danach erhebt sich die Frage: Welche Bedingungen sind dafür notwendig und hinreichend dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$ ist? Die Untersuchung dieser Probleme ist das Ziel dieser Arbeit.

Vor kurzem[3)] habe ich das soeben besprochene Problem im *Stiemkeschen* Körper,[4)] in dem jedes Ideal nur endlich viele Primidealteiler besitzt, untersucht und folgendes Resultat erhalten: Wenn $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$ im Stiemkeschen Körper gilt, muss $\mathfrak{b}$ idempotent sein, usw.

In einem *speziellen* unendlichen algebraischen Zahlkörper, in dem kein idempotentes Primideal ausser Einheits- und Null-ideal existiert, habe ich auch bewiesen,[5)] dass es keinesweg geschehen kann, dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ ist, und $\mathfrak{p}\supset\bigcap_{\tau}\mathfrak{p}_{(\tau)}$, $\tau\in\mathfrak{J}$ für $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$ notwendig und hinreichend ist, wobei $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ ist und $\mathfrak{p}_{(\tau)}$, $\tau\in\mathfrak{J}$ alle von $\mathfrak{p}$ verschiedene Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ sind.

1). Für *I* und *II* siehe etwa „Stiemke", s. 20 oder „Krull [1]", s. 44. —— Über den im folgenden benutzten Arbeiten siehe Literaturverzeichnis am Ende dieser Note.

2). „Krull [3]", s. 103.

3). „Nakano [8]", s. 281-284, §3. Idempotentes Ideal.

4). „Stiemke" und „Krull (1)", s. 42.