JOURNAL OF SCIENCE OF THE HIROSHIMA UNIVERSITY, SER. A, VOL. 21, NO. 2, JULY, 1957

Zur Idealtheorie der unendlichen algebraischen Zahlkörper

Von

Wolfgang KRULL in BONN

(Eingegangen am 1, Mai 1957)

In einer Reihe kürzlich erschienener Arbeiten hat Herr *N. Nakano*[1] die Idealtheorie der unendlichen algebraischen Zahlkörper weiterentwickelt ohne Benützung bewertungstheoretischer oder topologischer Methoden und mit besonderer Berücksichtigung solcher Körper $\mathfrak{K}$, bei denen für das Zerfallen der Primideale des Grundkörpers $\mathfrak{K}_0$ in den zwischen $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}$ liegenden, über $\mathfrak{K}_0$ endlichen Körpern $\mathfrak{K}_i$ spezielle Bedingungen erfüllt sind. Der NAKANOsche Ansatz hat den Vorteil, daß die Aufmerksamkeit auf einen Punkt gelenkt wird, der sich bewertungstheoretisch-topologisch charakterisieren läßt:

Ist B eine Bewertung von $\mathfrak{K}$, so liefert die durch B induzierte Bewertung B_i eines über $\mathfrak{K}_0$ endlichen Zwischenkörpers $\mathfrak{K}_i$ eine *Approximation* von B, indem sie ein "*Intervall*" $\mathfrak{i}_i$ festlegt, in das alle und nur die Bewertungen B_σ von $\mathfrak{K}$ hineinfallen, die die gleiche Bewertung B_i von $\mathfrak{K}_i$ induzieren wie B.[2] Gleichzeitig liefert B_i auch eine Approximation der Wertgruppe Γ von B. Denn es wird Γ gleich der Vereinigungsgruppe der Wertgruppen Γ_i der Bewertungen B_i, wenn $\mathfrak{K}_i$ alle über $\mathfrak{K}_0$ endlichen Zwischenkörper durchläuft. Dabei ist zwar der "*Raum*" aller Bewertungen B von *gleichmäßiger Struktur* im Sinne von *Bourbaki*, wenn man ihn mit Hilfe der Umgebungen $\mathfrak{i}_i$ der B topologisiert. Aber für die Approximation der Wertgruppen Γ durch ihre Untergruppen Γ_i gilt i.a. keinerlei Gleichmäßigkeitsaussage. Es kann z.B. vorkommen, daß für jeden Körper $\mathfrak{K}_i$ in der Umgebung $\mathfrak{i}_i$ von B Bewertungen B_σ auftreten, bei denen die Approximationsuntergruppe Γ_{σ_i} der Wertgruppe Γ_σ von B_σ von der Approximationsuntergruppe Γ_i der Wertgruppe Γ von B verschieden ist, obwohl $\Gamma = \Gamma_\sigma$. Man muß also beim Studium jedes Intervalls $\mathfrak{i}_i$ stets die Struktur der Menge aller Γ_{σ_i} berücksichtigen, und es liegt daher nahe, zu fragen, welche Vereinfachungen eintreten, wenn man passende Gleichmäßigkeitsaxiome für die Approximation der Γ_σ durcn die Γ_{σ_i} vorschreibt.

In diesen Gedankenkreis gehört nun eine von Herrn NAKANO formulierte Forderung,[3] die hier kurz als *NAKANOsche Bedingung* bezeichnet werden soll, und zu der man rein idealtheoretisch folgendermaßen kommt: Man betrachtet statt der Bewertungen B von $\mathfrak{K}$ die ihnen umkehrbar eindeutig entsprechenden Primideale $\mathfrak{p}$ aus der Hauptordnung $\mathfrak{H}$ aller ganzen Zahlen von $\mathfrak{K}$. Zu einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{H}$ mit dem Primoberideal $\mathfrak{p}$ bildet