アルキメデス的半順序群の可換性

小笠原藤次郎

(昭和 17 年 11 月 2 日受附)

"完全群束は可換である", とは G. Birkhoff の豫想として, 角谷靜夫氏[(1)]によつて我國に紹介せられ, 之に對する證明を與へることが, 最初中山正氏[(2)]によつて問題とせられた。岩澤健吉氏[(3)]は, ベクトル束に於けるスペクトル分解定理の證明方法[(4)]が完全群束に適用される様に理論を構成して, この問題を解決した。問題が代數的であるから, 之を代數的に解決することが望しい。此處には, 之に對する簡單な代數的別證明を與へることと, より一般な, アルキメデス的半順序群の可換性を示すことが目的である。[(5)] 完全群束の場合に於ける證明は, σ-完全の場合にも, 其儘成立つ。アルキメデス的半順群に對しては, 切斷による完全化[(6)]により, 問題を完全群束の場合に歸着せしめて証明する。

§1. 完全群束の可換性の證明。

群束とは定義により, 右及び左からの積を作ることにより半順序が保存され, 且束となつてゐる群である。即ち, $a \leqq b$ のとき, 任意の要素 c に對し, $ac \leqq bc$, $ca \leqq cb$ となることが要求されてゐる。群束は必ず配分束になることが證明されてゐる。[(7)]

G を群束とし, 要素 a に對し, $a \cup 1$ 及び $a^{-1} \cup 1$ を夫々 a の正部分, 負部分と云ひ, a_+, a_- で表す。また $a_+ \cup a_-$ を a の絶對値と云ひ, $|a|$ で表す。$|a| \cap |b| = 0$ なる a, b は互に直交すると云ふ。

補題 1. $a = a_+ a_-^{-1} = a_-^{-1} a_+$, $a_+ \cap a_- = 1$. 逆に $a = bc^{-1}$ (或は $a = c^{-1}b$) 且 $b \cap c = 1$ のとき, $b = a_+$, $c = a_-$ となる。

---

(1) 中山正：學士院紀事 **18** (昭和 17), 1-4. 1 頁脚註 (6) に據る。

(2) 中山正：前掲。

(3) 岩澤健吉：全國紙上數學談話會, **235** (昭 17), 1030-1048.

(4) 中野秀五郎：數學輯報, **17** (1941), 425-511.

(5) 小笠原藤次郎：全國紙上數學談話會, **241** (昭 17), 1282-1285. に本論文の概要が記されてゐる。

(6) A. H. Clifford: Ann. of Math., **41** (1940) 454-473. 定理 3. 中野秀五郎：數物記事, **23** (1941), 485-511. 附錄。

(7) G. Birkhoff 流の證明は, 中山正：全國紙上數學談話會, 228 (昭 16) 647-648 に與へられてゐる。