Ueber allgemeine Multiplikationsringe. II.

Von

Shinziro Mori.

(Eingegangen am 20. Januar 1934.)

Wie in meiner früheren Arbeit gleichen Titels(1) seien in der vorliegenden Arbeit auch die Elemente vom zugrunde gelegten Ring $\mathfrak{R}$ in irgendeiner Wohlordnung gegeben.

Ueber Ringe, in denen jedes Ideal mit seinem Kern identisch ist.

Satz 15. *Es sei jedes Ideal des kommutativen Ringes $\mathfrak{R}$ mit seinem Kern identisch. Ist ein Primideal $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{R}$ verschieden, und ist $\mathfrak{p}'$ kein maximales Ideal, so ist $\mathfrak{p}'$ kein echter Teiler jedes Primärideals.*(2)

Zunächst nehmen wir an, dass $\mathfrak{p}'$ ein echter Teiler eines Primärideals $\mathfrak{q}''$ ist, und dass $\mathfrak{q}''$ zu einem Primideal $\mathfrak{p}''$ gehört.(3) Dann ist $\mathfrak{p}'$ ein Teiler von $\mathfrak{p}''$, und ferner können wir in $\mathfrak{p}'$ ein Element p' finden, so dass p' durch $\mathfrak{q}''$ unteilbar ist. Aus der Voraussetzung, dass $\mathfrak{p}'$ kein maximales Ideal ist, folgt die Existenz eines von $\mathfrak{R}$ verschiedenen echten Teilers $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}'$, und wir betrachten damit das Ideal

$$\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}p', \mathfrak{q}'') .$$

Wäre $p' \equiv 0\ (\mathfrak{b})$, so würde

$$rp' \equiv ap'\ (\mathfrak{q}'') , \qquad p' \not\equiv 0\ (\mathfrak{q}'') ,$$

wo r ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{R}$, und a ein Element aus $\mathfrak{a}$ bedeutet. Da $\mathfrak{q}''$ ein zu $\mathfrak{p}''$ gehöriges Primärideal ist, so folgte daraus $r-a \equiv 0\ (\mathfrak{p}'')$. Aus $\mathfrak{p}' \equiv 0\ (\mathfrak{a})$, $\mathfrak{p}'' \equiv 0\ (\mathfrak{p}')$ ergäbe sich damit $r \equiv 0\ (\mathfrak{a})$; was aber unmöglich wäre. Hiermit muss $p' \not\equiv 0\ (\mathfrak{b})$ sein, und folglich

(1) Journ. of Sci. of the Hiroshima Univ. Ser. A, **4**, S. 1–26.

(2) Dieser Satz ist auch mit Hilfe des Satzes 12 bewiesen. Vgl. den Beweis von Satz 18.

(3) Wir brauchen den Begriff des Primärideals in der üblichen Fassung.