

Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit in Integritätsbereichen.

Von

Shinziro MORI und Takeo DODO.

(Eingegangen am 20. 9. 1936.)

Für die im Titel erwähnten Bedingungen hat B. L. van der Waerden den folgenden merkwürdigen Satz bewiesen⁽¹⁾:

Wenn in einem Ring der Teilerkettensatz gilt, ein Einheitselement vorhanden ist, jedes Hauptideal einem Produkt von höheren Primidealen äquivalent ist und wenn für Hauptideale die Quasiteilbarkeit mit Teilbarkeit gleichbedeutend ist, so ist der Ring ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenring und umgekehrt.

Diese gegebenen Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit beruhen aber auf den Eigenschaften der Hauptideale. Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist nach einer von van der Waerden ganz unabhängigen Beweismethode die Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit anzugeben, die von den Eigenschaften der symbolischen Potenzen der Primideale abhängen.

Ist \mathfrak{p} ein Primideal aus dem Ring \mathfrak{R} , so besitzt \mathfrak{p}^r eine einzige, und zwar zu \mathfrak{p} gehörige isolierte Primärkomponente $\mathfrak{p}^{(r)}$; diese wird nach W. Krull⁽²⁾ die „symbolische r -te Potenz von \mathfrak{p} “ genannt, und sie besitzt die folgende wichtige Eigenschaft:

$\mathfrak{p}^{(r)}$ ist die Gesamtheit aller Elemente aus \mathfrak{p} , die durch Multiplikation mit geeignetem durch \mathfrak{p} unteilbarem Element aus \mathfrak{R} in Elemente von \mathfrak{p}^r verwandelt werden können.

Im folgenden behandeln wir nur den kommutativen Ring mit Einheitselement, aber ohne Nullteiler, in dem der Teilerkettensatz gilt. Wir wollen diesen Ring „Integritätsbereich mit Teilerkettensatz“ nennen

(1) B. L. van der Waerden, Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz-abgeschlossenen Ringen, Math. Annalen **101** (1929), 293.

B. L. van der Waerden, Zur Idealtheorie der ganz-abgeschlossenen Ringe, Math. Annalen **101** (1929), 309.

(2) W. Krull, Idealtheorie (1935), 37.