Über die Produktzerlegung der Hauptideale. II.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 22. 5. 1939.)

In der vorliegenden zweiten Mitteilung(1) wird statt der Behauptung(2) von Schmidt ein wichtiger Satz bewiesen werden, der die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Produktzerlegung der Hauptideale eines allgemeinen Integritätsbereiches $\mathfrak{J}$ gibt.

Notwendige Bedingungen.

In diesem Paragraphen sei $\mathfrak{J}$ ein allgemeiner Integritätsbereich mit *Einselement*, in dem jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt der

---

(1) Vgl. die erste Mitteilung: Über die Produktzerlegung der Hauptideale, dieses Jour. **8** (1938), 7.

(2) F. K. Schmidt, Über die Primidealzerlegung der Hauptideale eines Integritätsbereichs, Sitz.-Ber. München. Akad. Wiss. (1928), 285.

Satz von Schmidt. *Damit in einem Integritätsbereich* $\mathfrak{J}$ *jedes Hauptideal als Potenzprodukt von Primidealen darstellbar ist, ist notwendig und hinreichend dass*

1) *jede mit einem Hauptideal beginnende Idealquotienten-kette im Endlichen abbricht,*

2) $\mathfrak{J}$ *ganz abgeschlossen ist.*

Die Notwendigkeit der Bedingungen folgt leicht aus Sätze 6, 8 und 9, aber die Bedingungen sind durch das folgende Beispiel nicht hinreichend:

Beispiel. Ist C der Ring aller ganzen rationalen Zahlen, so ist der Ring $C[x, \sqrt{2x}]$ ganz abgeschlossen und in diesem Bereich ist die erste Bedingung auch erfüllt. Das Hauptideal (x) ist aber als ein Potenzprodukt der Primideal nicht darstellbar, da (x) ein zum Primideal $(x, \sqrt{2x})$ gehöriges Primärideal ist. (B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra* II, 108.)

Ist $\mathfrak{J}$ ein Integritätsbereich mit Teilerkettensatz, so ergibt sich der folgende Satz:

Notwendig und hinreichend, damit $\mathfrak{J}$ *ganz abgeschlossen sei, ist, dass kein Primärideal zwischen den symbolischen Potenzen* $\mathfrak{p}^{(1)}$ *und* $\mathfrak{p}^{(2)}$ *des zu einem beliebigen Hauptideal gehörigen Primideals* $\mathfrak{p}$ *je eingeschaltet werden kann.*

Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Bewertungstheorie (W. Krull, *Idealtheorie*, 100) und auch ohne Benutzung dieser Theorie können wir den Satz beweisen (S. Mori, Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit in Integritätsbereichen, dieses Jour. **7** (1937), 15).