Zerlegung der Hauptideale aus Polynomringen in minimale Primideale.

Von

Shinjiro MORI und Takeo DODO.

(Eingegangen am 17. 5. 1938.)

Es sei $\mathfrak{J}$ ein Integritätsbereich mit Einselement und $\mathfrak{J}[x]$ seine transzendente Erweiterung, d. h. die Gesamtheit aller ganzen Funktionen einer Veränderlichen x mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}$. Nehmen wir an, dass in $\mathfrak{J}$ eindeutige Zerlegung in Primelemente besteht, so gilt bekanntlich das Gleiche auch für den Erweiterungsbereich $\mathfrak{J}[x]$.(1) Auf Grund dieser eindeutigen Zerlegung ist die Gesamtheit aller durch ein Primelement teilbaren Elemente von $\mathfrak{J}$ ein minimales Primideal in $\mathfrak{J}$. In den folgenden Zeilen wollen wir untersuchen, ob dieser elementare Satz in geeigneter idealtheoretischer Einkleidung auch dann noch gültig bleibt, wenn wir ein Primelement durch ein minimales Primideal in $\mathfrak{J}$ ersetzen, und wenn wir die folgende Eigenschaft von $\mathfrak{J}$ zulassen:(2)

Sind zwei beliebige verschiedene minimale Primideale in $\mathfrak{J}$ beide kein Hauptideal, so sind sie immer teilerfremd.

Dazu nehmen wir im folgenden an, dass im Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ jedes Hauptideal immer als Potenzprodukt der minimalen Primidealen darstellbar ist.

Es sei $\mathfrak{J}[x]$ eine transzendente Erweiterung von $\mathfrak{J}$ durch eine Variable x, $\mathfrak{a}[x]$ bedeute die Gesamtheit aller Polynome in x mit Koeffizienten aus einem Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{J}$. Dann ist $\mathfrak{a}[x]$ auch ein Ideal in $\mathfrak{J}[x]$ und $\mathfrak{p}[x]$ ist prim, wenn $\mathfrak{p}$ prim in $\mathfrak{J}$ ist.

Es sei ein Element $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m\ (m\geqq 1)$ aus $\mathfrak{J}[x]$ *primitiv*, d. h. die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_m$ haben keinen gemeinsamen Teiler in $\mathfrak{J}$. Ferner sei es das Produkt des Elements $f(x)$ mit irgend-

(1) K. Hensel, Über eindeutige Zerlegung in Primelemente, Journ. f. Math. **158** (1927), 195. B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra* I, 73.

(2) Den Zerlegungssatz der Quasihauptideale im Multiplikationsring hat W. Krull gefunden, der eine Verallgemeinerung des elementaren Zerlegungssatz von Polynom darstellt. W. Krull, Hauptidealzerlegung in Polynomringen, Math. Zeitschr. **41** (1936), 213.