Bemerkungen zur Zerlegung der Hauptideale in allgemeinen Integritätsbereichen.

Von

Takeo DODO.

(Eingegangen am 20. 9. 1937.)

Schon früher hat Herr W. Krull in seiner Arbeit[1] die Zerlegung der Hauptideale in allgemeinem Ring $\mathfrak{R}$ als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen, die zu höchsten Primidealen von $\mathfrak{R}$ gehören behandelt. Bei seiner Untersuchung aber wird vorausgesetzt, dass von zwei zum selben höchsten Primideal gehörigen Primäridealen in $\mathfrak{R}$ stets eines durch das andere teilbar sei, und ausserdem sind die Ausdruckweise und die Methoden bewertungstheoretisch. Im folgenden wollen wir ohne die obige Voraussetzung dieses Problem aus idealtheoretischem Standpunkt untersuchen.

Unter einem „*allgemeinen Integritätsbereiche* $\mathfrak{J}$" verstehen wir einen kommutativen Ring mit Einheitselement aber ohne Nullteiler, in dem die Gültigkeit des Teilerkettensatzes nicht gefordert wird.

Ein Primideal $\mathfrak{p}$, das Teiler eines Ideals $\mathfrak{a}$ ist und kein echtes Primidealvielfaches mit der gleichen Eigenschaft besitzt, möge „*höchstes Primideal von* $\mathfrak{a}$" heissen.

Ein Primideal $\mathfrak{p}$ soll „*in* $\mathfrak{J}$ *minimal*" genannt werden, wenn $\mathfrak{p}$ (ausser (0)) kein echtes Primidealvielfaches besitzt.

Satz 1. *Es sei in* $\mathfrak{J}$ *jedes Hauptideal* (p) *als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellbar, die zu höchsten Primidealen von* (p) *gehören. Dann bricht die Reihe der Idealquotienten* $(p)\subset(p):(p')\subset(p):(p'^2)\subset\cdots\cdot$ *nach endlichvielen Gliedern ab, d.h. für ein gewisses* k *ist:* $\mathfrak{a}=(p):(p'^k)=(p):(p'^{k+1})=\cdots\cdot$, *und es gibt nur endlichviele verschiedene Ideale* $\mathfrak{a}$, *wenn* (p') *alle Hauptideale aus* $\mathfrak{J}$ *durchläuft, und ausserdem ist der Idealquotient* $(p):(p')$ *stets durch ein höchstes Primideal von* (p) *teilbar oder gleich* $\mathfrak{J}$.

---

(1) W. Krull, Über die Zerlegung der Hauptideale in allgemeinen Ringen. Math. Annalen, **105** (1931), 1.