Über die Noetherschen fünf Axiome[1] in kommutativen Ringen.

Von

Keizi KUBO.

(Eingegangen am 31. Jan. 1940.)

Nach E. Noether ist die hinreichende Bedingung dafür, dass jedes von Einheits- und Nullideal verschiedene Ideal des allgemeinen kommutativen Ringes $\mathfrak{R}$ sich eindeutig als Potenzprodukt von endlich vielen, von Einheits- und Nullideal verschiedenen Primidealen darstellen lässt, dass in $\mathfrak{R}$ die folgenden fünf Axiome erfüllt sind:

1. Der Teilerkettensatz.
2. Der Vielfachenkettensatz modulo jedem von Nullideal verschiedenen Ideal (Der abgeschwächte Vielfachenkettensatz.[2])
3. Existenz des Einheitselementes.
4. Ring ohne Nullteiler.
5. Ganze Abgeschlossenheit im Quotientenkörper.

Aber werden diese Bedingungen notwendig sein? Bekanntlich ist aber das Axiom 3 die Folge von 5 und ausserdem folgt das Axiom 1 aus 2 und 4.[3] Was ist dann notwendig? Auf diese Frage antwortet E. Noether, dass diese obig bezeichnete Bedingung auch notwendig unter der wichtigen Voraussetzung ist, dass alle von Nullideal verschiedenen Primideale einfache Ideale sind und umgekehrt.[4]

Auch für einen Integritätsbereich $\mathfrak{o}$ zeigt B. L. v. d. Waerden[5] die folgenden drei Axiome als die hinreichenden Bedingungen dafür, dass jedes Ideal von $\mathfrak{o}$ sich eindeutig als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellen lässt:

1.′ Der Teilerkettensatz.

2.′ Alle von Nullideal verschiedenen Primideale sind teilerlos.

3.′ Ganze Abgeschlossenheit im Quotientenkörper.

Und umgekehrt spricht Waerden aus, dass diese Axiome auch notwendig

---

(1) E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörper, Math. Annalen **96** (1926), 26.

(2) W. Krull, *Idealtheorie*, (1935), 14.

(3) Y. Akizuki, Teilerkettensatz und Vielfachenkettensatz, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **17** (1935), 342.

S. Mori, Über Totalnullteiler kommutativer Ringe mit abgeschwächtem U-Satz, dieses Jour., **6** (1936), 144.

(4) E. Noether, loc. cit., § 9.

(5) B. L. v. d. Waerden, *Moderne Algebra*. II (1931), 97.