ÜBER DEN FUNDAMENTALSATZ DER IDEALTHEORIE IN UNENDLICHEN ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPERN

Von

Noboru NAKANO

(Eingegangen am 25, Mai 1951)

In seiner Arbeit[1] hat herr W. Krull die Begriffe des Punktringes und des Zurückleitungsideals eingeführt und mit Hilfe dieser Begriffe den Fundamentalsatz bewiesen;

Ist $\mathfrak{K}$ ein unendlicher algebraischer Zahlkörper, und ist $\mathfrak{R}$ die Menge aller ganzen algebraischen Zahlen aus $\mathfrak{K}$, so lässt sich jedes Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ als ein kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches seiner sämtlichen Primärkomponenten darstellen.

In der vorliegenden Note werde ich den Fundamentalsatz in einem abstrakten Ringe $\mathfrak{O}$ beweisen, welcher den eben genannten Ring $\mathfrak{R}$ als einen spezialen Fall enthält. Als Stütze gebrauche ich hierbei den Begriff des Halbprimideals und eine Eigenschaft einer isolierten Primärkomponente eines Ideals.

1. Vorbereitende Untersuchungen

Es sei $\mathfrak{O}$ ein Ring, in dem folgende drei Bedingungen erfüllt sind;

I. *$\mathfrak{O}$ ist ein kommutativer Integritätsbereich mit Einselement.*

II. *Jedes von $\mathfrak{O}$ verschiedene Ideal ist durch mindestens ein Primideal[2] teilbar, und alle Primideale sind teilerlos.*

III. *Es sei $\mathfrak{a}(\neq\mathfrak{O})$ ein gegebenes Ideal, $\mathfrak{h}$ das zugehörige Halbprimideal[3] von $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$. Ist π ein Element aus $\mathfrak{p}$, so gibt es ein solches Element s, dass $\pi s\in\mathfrak{h}$, $s\notin\mathfrak{p}$ ist.*[4]

Dann gilt in $\mathfrak{O}$ für isolierte Primärkomponenten eines Ideals folgender Satz.

---

1) W. Krull, Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern. Math. Zeit. 29 (1929), zitiert mit [W. Krull].

2) Im folgenden verstehen wir unter Primideal stets ein von Einheits-und Null-ideal verschiedenes Primideal.

3) Ist $\mathfrak{h}$ die Gesamtheit aller Elemente h von der Art, dass eine Potenz von h durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist, so nennen wir $\mathfrak{h}$ das "*Zugehörige Halbprimideal von* $\mathfrak{a}$."

4) *Anmerkung* 1. In diesem Ring $\mathfrak{O}$ wird keine Endlichkeitsbedingung vorausgesetzt.

Anmerkung 2. Ein Beispiel von solchem Ringe ist der Ring $\mathfrak{R}$ aller ganzen Zahlen eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers $\mathfrak{K}$ (vgl. §2 dieser Note).