Über die Symmetrie des Prädikates "relativ prim".

Von

Shinjiro MORI.

(Eingegangen am 20 Jan. 1949)

In seinem Lehrbuch "Moderne Algebra" nennt Herr B.L. van der Waerden "*Ideal* $\mathfrak{b}$ *relativ prim zu Ideal* $\mathfrak{a}$", falls $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ ist; doch ist aber dieses Prädikat in allgemeinen Fällen offensichtlich nicht symmetrisch. So erhebt sich die Frage: *In welchem Ring diese Definition für die von Null verschiedenen Ideale symmetrisch ist?*; und diesem Problem ist die folgende Arbeit gewidmet.

Auf Grund hiervon nehme ich an, der zu behandelnde Ring sei kommutativ und besitze ein von $\mathfrak{R}$ und (o) verschiedenes Ideal.

Zunächst wird unser Problem im allgemeinsten Ring behandelt und dann sind die Ergebnisse dieser Betrachtungen bei speziellen, aber interessanten Ringen angewandt.

1. Diskussion im allgemeinen Ring.

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der am Anfang besprochenen Frage im allgemeinen kommutativen Ring beschäftigen. Dazu ist es genügend den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 1. *Im allgemeinen kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ ist das Prädikat "relativ prim" dann und nur dann symmetrisch, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Für jeden Teiler $\mathfrak{b}(\neq\mathfrak{R})$ eines gegebenen Ideals $\mathfrak{a}(\neq\mathfrak{R},\neq(0))$ gibt es stets ein solches Element r, dass $(r)\mathfrak{b}\leqq\mathfrak{a}$, $r\not\equiv\mathfrak{a}$ ist.*

2. *Für jedes Element r ausserhalb von $\mathfrak{a}$ $(\neq(0))$ ist $(r)\mathfrak{R}\not\leqq\mathfrak{a}$.*

Zum Beweise nehmen wir an, dass aus $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\neq(o)$, $\mathfrak{b}\neq(o)$ stets $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}:\mathfrak{a}$ folgt. Dann muss für jeden Teiler $\mathfrak{b}(\neq\mathfrak{R})$ von $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\supset\mathfrak{a}$ sein, weil $\mathfrak{R}=\mathfrak{b}:\mathfrak{a}$ ist. Daraus folgt die Existenz eines Elementes r derart, dass

$$(r)\mathfrak{b}\leqq\mathfrak{a}, \qquad r\not\equiv\mathfrak{a}.$$

Da $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}:\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\neq(o)$ ist, so muss wegen der Symmetrie $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}:\mathfrak{R}$ sein, also ist $(r)\mathfrak{R}\not\leqq\mathfrak{a}$ für jedes Element r ausserhalb von $\mathfrak{a}(\neq(0))$. Die Bedingungen sind hiermit notwendig.

Umgekehrt setzen wir die Gültigkeit der Bedingungen voraus. Da aus $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}:\mathfrak{a}$ leicht $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}:(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ folgt, so muss nach den Bedingungen 1 und 2 $(\mathfrak{b},\mathfrak{a})=\mathfrak{R}$ sein. Damit muss $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ sein. Denn sonst wäre $(r)\mathfrak{b}\leqq\mathfrak{a}$ für ein Element r ausserhalb von $\mathfrak{a}$, und daraus folgte $(r)(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=(r)\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{a}$, was der Bedingung 2 widerspricht. Nämlich dass das Prädikat "relativ prim" symmetrisch ist.

Hieran schliesst sich noch folgender

Satz 2. *Ist das Prädikat "relativ prim" im Ring $\mathfrak{R}$ symmetrisch, so sind in $\mathfrak{R}$ die beiden Prädikate "relativ prim" und "teilerfremd" gleichbedeutend.*

Denn aus $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}:(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$, und wegen der Symmetrie ergibt sich $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\mathfrak{R}$.