JOURNAL OF SCIENCE OF THE HIROSHIMA UNIVERSITY, SER. A, VOL. 17, NO. 3 MAR., 1954

Über die Gleichung $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$ *mit einem unbekannten Ideale* $\mathfrak{x}$

Von

Shinziro MORI

(Eingegangen 31 Oktober, 1953)

Sei $\mathfrak{R}$ ein Noetherscher Ring, in dem die Existenz eines Einheitselementes nicht vorausgesetzt wird, und seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ irgend zwei Ideale aus $\mathfrak{R}$. Dann hat die Gleichung $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$ mit einem unbekannten Ideale $\mathfrak{x}$ eine und nur eine grösste Lösung. In der vorliegenden Note möchte ich in die Auflösung dieser Gleichung tiefer eindringen und die Eigenschaften ihrer Lösung klar machen.

Zunächst zeigt es sich, dass die grösste Lösung von $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$ mit $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b})$ übereinstimmt. Es gelingt dann, einen grundlegenden Satz für die Auflösung dieser Gleichung zu gewinnen, und aus diesem Resultat ergeben sich wichtige Folgerungen für die Zerlegung des Durchschnittes $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b})$.

Als ein spezieller Fall dieser Ergebnisse haben wir den folgenden interessanten Satz von Zariski:[1]

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ irgend zwei Ideale aus einem Noetherschen Ring mit Einheitselement, und sind $\mathfrak{q}_{k+1}, \mathfrak{q}_{k+2}, \cdots, \mathfrak{q}_m$ alle Primärkomponenten von $\mathfrak{b}$, für die $(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{a})=(1)$, $(i=k+1, \cdots, m)$ gelten, so ist

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b})=[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{q}_k].$$

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{R}$ einen Noetherschen Ring, in dem ein Einheitselement nicht notwendig existiert.

1. Vorbereitungen

Um leicht zu unserem Ziele zu gelangen, schicken wir den folgenden Satz voraus:

SATZ 1. *Gilt* $(\mathfrak{a}\mathfrak{c}, \mathfrak{b})=\mathfrak{c}$ *für irgend drei Ideale* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *und* $\mathfrak{c}$, *so gibt es in* $\mathfrak{a}$ *ein Element* a *derart, dass für jedes Element* c *von* $\mathfrak{c}$ $ac\equiv c$ $(\mathfrak{b})$ *ist.*[2]

Der Fall $\mathfrak{c}=\mathfrak{b}$ ist selbstverständlich. Es sei damit $\mathfrak{c}\supset\mathfrak{b}$. Ferner seien

$$(1) \qquad \mathfrak{c}=(c_1, c_2, \cdots, c_m, \mathfrak{b}), \qquad \mathfrak{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

Da nach der im Satz ausgesprochenen Voraussetzung

1) O. Zariski, Generalized semi-local rings, Summa Brasiliensis Mathematicae 1, 169-195 (1946).

2) Dieser Satz ist nur eine Umformung meines älteren Satzes. Siehe: S. Mori, Über Produktzerlegung der Ideale, Journ. Sci. Hiroshima Univ. 2, 1-19 (1932).