JOURNAL SCIENCE OF THE HIROSHIMA UNIVERSITY, SER. A, VOL. 18, NO. 3, JANUALY, 1956

Über die Multiplikativeigenschaft der Ideale in Unendlichen Algebraischen Zahlkörpern

Von

Noboru NAKANO

(Eingegangen am 31, Oktober, 1955)

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{K}$ einen algebraischen Zahlkörper, welcher als der Vereinigungskörper von abzählbar unendlich vielen algebraischen Zahlkörpern $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_\nu, \cdots$ definiert wird, wobei jeder $\mathfrak{K}_\nu$ von endlichem Grade über dem Rationalkörper $\mathfrak{K}_0$ ist und $\mathfrak{K}_\nu$ in $\mathfrak{K}_{\nu+1}$ enthalten ist. Wir bezeichnen diesen Körper $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K}=\{\mathfrak{K}_\nu\}$. Ist $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}_\nu$ resp. die Hauptordnung aus $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_\nu$, so ist offenbar $\mathfrak{O}=\{\mathfrak{O}_\nu\}$.

Dann ist die folgende Frage idealtheoretisch sehr interessant: Welche Bedingungen sind dafür notwendig und hinreichend, dass für zwei gegebene Ideale $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{O}$ ein drittes Ideal $\mathfrak{c}$ existiert, so dass es der Gleichung $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ genügt? Die Untersuchung dieser Probleme ist das Ziel dieser Note. In seiner Arbeit[1] hat Herr W. Krull die bewertungstheoretische Behandlung der Idealtheorie in $\mathfrak{O}$ entwickelt und die Untersuchung dieser Probleme in der Methode von der Topologisierung des Bewertungsringraumes gemacht. Seine Untersuchung[2] beshäftigt sich mit dem Fall, dass $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die genannten "*überall endlichen Ideale*"[3] sind.

Im folgenden ersten Paragraphen schicken wir als Vorbereitung einige Hilfssätze voraus, deren manche ich schon bewiesen habe. Im zweiten Paragraphen wollen wir die Untersuchung dieser Probleme für "*überall endliche Ideale*" in der idealtheoretischen Methode machen. Im dritten Paragraphen wird meine Untersuchung noch verallgemeinert. Zu diesen Zwecken schicken wir folgende Annahme über die zugrunde gelegten Ideale voraus: *Es sei* $\mathfrak{q}$ *die zu einem beliebigen Primideal* $\mathfrak{p}$ *gehörige isolierte Primärkomponente* (*kurz mit I.P.K.*) *von einem Ideal* $\mathfrak{a}$ *und sei* N *ein hinreichend grosser Index, so muss* $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu$ *die zu* $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\nu$ *gehörige I.P.K. von* $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\nu$ *für alle* ν $(\nu\geqq N)$ *sein und* N *für alle* $\mathfrak{p}$ *beschränkt sein.* Wenn $\mathfrak{K}$ ein Stiemkescher Körper[4] ist, dann

1) "Krull [2]". Über den im folgenden benutzten Arbeiten siehe Literaturverzeichnis am Ende dieser Note.

2) "Krull [2]". Satz 25, s. 552.

3) Siehe dieser Note s. 443.

4) Es sei $\mathfrak{K}$ ein unendlicher algebraischer Zahlkörper, in dem jedes Ideal nur endlich viele Primidealteiler besitzt. Wir nennen einen solchen Körper $\mathfrak{K}$ "Stiemkeschen Körper".