Journal of Science of the Hiroshima University, Ser. A, Vol. 19, No. 3, January, 1956

Über Idealtheorie der Multiplikationsringe

Von

Shinziro MORI

(Eingegangen am 20. Okt. 1955)

In Bd. 16 dieser Zeitschrift habe ich die Strukturtheorie der idempotenten Multiplikationsringe auf Grund der Annahme entwickelt,[1] dass jedes idempotente Element sich als eine direkte Summe von endlich vielen primitiven Elementen darstellen lässt. Für die nicht-idempotenten Ringe habe ich dabei den Struktursatz nur in einer unvollständigen Weise ausgeführt. Entsprechend dem primitiven Element ist die Existenz eines maximalen Primideals mühelos einzusehen. Ausserdem wird nach Lemma von Krull[2] der Existenzbeweis eines Primideals leicht ausgeführt, wenn der Ring ein Einheitselement enthält. In der vorliegenden Note wird demnach die folgende Annahme vorausgesetzt:

Wenn der Multiplikationsring idempotent ist, so hat jedes Ideal wenigstens einen Primidealteiler.

Unter dieser Voraussetzung wird zunächst die Untersuchung der Idealtheorie weiter geführt, und endlich der Zariskische Satz bewiesen, der sich stets aufstellt, gleichgültig ob der vorgelegte Ring idempotent ist, oder nicht. Im dritten Paragraphen wird meine frühere Vernachlässigung der Strukturtheorie der nicht-idempotenten Ringe in ganzen Umfange gerechtfertigt.

§ I. Idempotente Multiplikationsringe

Von *idempotentem Multiplikationsring* soll gesprochen werden, wenn für den Multiplikationsring $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{R}^2=\mathfrak{R}$ gilt. Für Multiplikationsring $\mathfrak{R}$ gilt zunächst der folgende Satz, der gleichgültig ist, ob $\mathfrak{R}$ idempotent ist, oder nicht.

Satz I. *Ist a ein nicht-nilpotentes Element aus $\mathfrak{R}$ und gilt $ab=a$ für ein anderes Element b, so gibt es in Ideal (b) ein von Null verschiedenes idempotentes Element.*

1) S. Mori, Struktur der Multiplikationsringe. Journal of Sci. of the Hiroshima Univ. **16**, 1-11 (1952).

Ein kommutativer Ring ohne jede Bedingung heisst ein *Multiplikationsring*, wenn nur folgende Bedingung erfüllt ist:

Zu je zwei Idealen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, wo $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}$ ist, gibt es stets ein Ideal $\mathfrak{c}$, so dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ist.

2) W. Krull, Idealtheorie ohne Endlichkeitsbedingung. Math. Annalen, **101**, 729-744 (1929).