ÜBER EINE ÜBERTRAGUNG ZWISCHEN RANDWERTAUFGABEN

FÜR EINEN KREISRING

Von Yûsaku KOMATU

1. Einleitung.

Die Integralformeln, um die Dirichletsche Randwertaufgabe für einen Kreisring zu lösen, wurden schon früher von verschiedenen Verfassern expliziterweise aufgestellt.[1] Davon anschließend hat der Verfasser der vorliegenden Note eine explizite Integralformel hergeleitet, welche die Lösung der Neumannschen Randwertaufgabe für einen Kreisring darstellt.[2] In einer anderen Note[3] hat er ferner die Übertragung zwischen diesen zwei Arten der Randwertaufgaben für einige einfach zusammenhängende kanonische Grundgebiete behandelt.

Nun wird sich zeigen, daß sich die in der letztgenannten Note benutzte Methode auch auf den Fall des Kreisrings wohl anwenden läßt und zwar der Umstand dabei der ganzen Glattheit des Randes gemäß mehr einfach ist. Von diesem Standpunkte aus soll in der vorliegenden Note das in der genannten Note[2] behandelte Problem wieder erörtert werden.

2. Einige Vorbereitungssätze.

Wir beginnen mit einem Hilfssatz, der eine formale Identität enthält.

Hilfssatz **1.** Es sei $u(re^{i\theta})$ eine im auf der $z=re^{i\theta}$ -Ebene gelegenen Kreisring R: $q<r<1$ eindeutige Funktion, die bezüglich r und θ zweimal stetig differenzierbar ist. Dann ist, für ein beliebig festes r_0 mit $q<r_0<1$, die durch die Gleichung

$$w(re^{i\theta})=\int_{r_0}^{r}\frac{u(te^{i\theta})}{t}dt$$

definierte Funktion auch dort eindeutig und sogar genügt sie der Beziehung

$$r^2\Delta w(re^{i\theta})=\int_{r_0}^{r}t\Delta u(te^{i\theta})dt+\gamma(\theta),$$

worin Δ den Laplaceschen Operator bedeutet und ferner gesetzt ist:

$$\gamma(\theta)=r_0 u_r(r_0 e^{i\theta}).$$

Beweis. Die Eindeutigkeit von $w(re^{i\theta})$ ist unmittelbar ersichtlich. Ferner gewinnt man durch direkte Berechnung

$$\begin{aligned}
&r^2\Delta w(re^{i\theta})\\
&=r^2\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}\int_{r_0}^{r}\frac{u(te^{i\theta})}{t}dt\\
&=r\frac{\partial}{\partial r}u(re^{i\theta})+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int_{r_0}^{r}\frac{u(te^{i\theta})}{t}dt\\
&=\int_{r_0}^{r}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)+\frac{1}{t}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}u(te^{i\theta})dt+r_0u_r(r_0e^{i\theta})\\
&=\int_{r_0}^{r}t\Delta u(te^{i\theta})dt+\gamma(\theta).
\end{aligned}$$

Von nun an wollen wir unsere Überlegung hauptsächlich auf harmonische Funktionen beschränken. In diesem Falle zieht der Hilfssatz 1 sofort nach sich den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz **2.** Wenn $u(re^{i\theta})$ in R eindeutig und harmonisch ist und $w(re^{i\theta})$ wieder wie im Hilfssatz definiert wird, dann stellt der Ausdruck

$$r^2\Delta w(re^{i\theta})\equiv r^2\Delta\int_{r_0}^{r}\frac{u(te^{i\theta})}{t}dt$$

eine in R eindeutige Funktion dar, welche von r unabhängig ist. Es besteht sogar

$$r^2\Delta w(re^{i\theta})=r_0u_r(r_0e^{i\theta}).$$