EINE BEMERKUNG ÜBER NEUMANNSCHE RANDWERTAUFGABE

Von Yûsaku KOMATU

1. Es sei D ein auf der ζ-Ebene gelegtes Gebiet mit einer glatten Begrenzung C, das der Einfachheit halber als beschränkt angenommen werden soll. Die Neumannsche Funktion $N(\zeta, z)$ von D mit der logarithmischen Singularität an z wird gewöhlich charakterisiert durch drei Bedingungen:

1° $N(\zeta,z)+\lg|\zeta-z|$ ist regulär harmonisch für $\zeta \in D$;

2° $\partial N(\zeta,z)/\partial \nu$ bleibt konstant für $\zeta \in C$, worin $\partial/\partial\nu \equiv \partial/\partial\nu_\zeta$ die Differentiation längs der nach Innen gerichteten Normale an ζ bedeutet; der konstante Wert ist dann notwendig gleich $2\pi/L$, wo L die Gesamtlänge von C bedeutet;

3° $\int_C N(\zeta, z)\,ds$ verschwindet,

worin $ds \equiv ds_\zeta$ das Linienelement längs C an ζ bedeutet.

Das Neumannsche Randwertproblem in Potentialtheorie läßt sich nun formulieren wie folgt:

Vorgelegt sei eine auf C definierte stetige Funktion $\Phi(s)$. Gesucht wird eine Funktion $u(z)$, welche den Bedingungen genügt:

$$\Delta u(z) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(z)=0$$

für $z=x+iy \in D$,

$$\frac{\partial u(\zeta)}{\partial \nu}=\Phi(s)$$

für $\zeta=\zeta(s) \in C$.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit des Problems ist bekanntlich, daß die gegebene Randfunktion für die Normalableitung der gesuchten in D harmonischen Funktion das verschwindende Mittel besitzt:

$$\int_C \Phi(s)\,ds=0.$$

Die Lösung des Problems wird dann eindeutig bestimmt bis auf eine willkürliche additive Konstante, und sie läßt sich in der Tat mittels der Neumannschen Funktion darstellen durch die Formel:

$$u(z)=c-\frac{1}{2\pi}\int_C \Phi(s)N(\zeta(s), z)\,ds;$$

hierin bedeutet c eine beliebige Konstante.

Unter den obengenannten charakterisierenden Bedingungen von $N(\zeta, z)$, hängt die letzte Bedingung 3° lediglich von einer Normierung ab. Falls man auf diese Bedingung verzichtet, so ergibt sich nur eine Unbestimmtheit von einer beliebigen additiven Größe, welche nur von z abhängen mag. Auf Grund der Erforderung, daß $\Phi(s)$ das verschwindende Mittel längs C besitzt, bleibt aber die Integralformel für $u(z)$ auch dann gültig.

Andererseits, in der letztgenannten Integralformel werden die Werte von $N(\zeta, z)$ lediglich für $\zeta \in C$ (und $z \in D$) benützt. Wenn $N(\zeta,z)$ um eine nur von ζ abhängige Größe abgeändert wird, dann ändert sich die durch diese Formel dargestellte Funktion $u(z)$ nur um eine additive Konstante.

Führt man folglich eine durch den Ausdruck

$$\mathfrak{N}(\zeta, z)=N(\zeta, z)+a(\zeta)+b(z)$$

für $\zeta \in C$ und $z \in D$

definierte Funktion ein, worin $a(\zeta)$ z. B. längs C meßbar angenommen wird, so läßt sich die Lösung des Neumannschen Problems mit der Randfunktion auch in der Form

$$u(z)=c-\frac{1}{2\pi}\int_C \Phi(s)\mathfrak{N}(\zeta(s), z)\,ds$$

darstellen, sofern das Mittel von $\Phi(s)$