Représentations unitaires des groupes symplectiques

par Masahiko SAITO

(Reçu le 31 août 1971)

§ 0. Introduction.

On se propose dans ce mémoire de construire plusieurs séries de représentations unitaires des groupes symplectiques sur un corps auto-dual.

Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif localement compact dont le groupe additif est auto-dual. Tanaka [7] et Shalika [5] ont construit toutes les représentations unitaires irréductibles de $SL(2, \mathbf{K}) = Sp(2, \mathbf{K})$. Ce travail est un essai de généraliser leurs résultats à un groupe symplectique quelconque $G_n = Sp(2n, \mathbf{K})$. La construction de Tanaka et Shalika repose sur la méthode développée par A. Weil [8], que nous suivrons aussi.

Soit Φ une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbf{K}^{n'}$. On construit d'abord une représentation projective unitaire U^Φ de G_n dépendant de Φ . On montrera ensuite que U^Φ provient d'une représentation linéaire unitaire $\tilde{U}^\Phi$ de G_n sous une certaine condition. Cette condition est vide pour le corps des nombres complexes et les corps finis, et est la parité de n' pour le corps des nombres réels et les corps p -adiques. Dans le dernier paragraphe, on se restreint au cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $\Phi = E$ (unité) et $n \leq n'$, et décompose la représentation $\tilde{U}^\Phi$ suivant les représentations irréductibles du groupe orthogonal $O(n')$. Les représentations ainsi obtenues sont définies sur l'espace des fonctions vectorielles sur l'espace $\mathfrak{S}_+$ des matrices symétriques positives d'ordre n et de carré intégrable par rapport à une mesure de Radon. Si $n = n'$, ces représentations sont toutes irréductibles.

On fixe les notations dans § 1. On construira dans § 2 les représentations projectives unitaires U^Φ dans l'espace des fonctions de carré intégrable sur l'espace $\mathcal{M}$ des matrices à n lignes et n' colonnes sur $\mathbf{K}$. Ici, on a suivi une méthode un peu différente de celle de Weil. On donnera aussi la forme explicite de l'opérateur pour certains éléments typiques de G_n .

Dans § 3, on définit, pour une matrice symétrique inversible A , le nombre $\Omega(\Phi, A)$, qui représente le facteur cohomologique de projectivité de la représentation U^Φ . Deux lemmes seront démontrés qui permettent de réduire le calcul de Ω au cas simple. On reproduira aussi le résultat sur la classification des formes quadratiques. Ici et dans le reste du mémoire, on suppose n' pair pour le corps des nombres réels et les corps p -adiques.