Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 3, No. 1, May, 1951.

Über den Kommutator der Matrizen

Kenjiro SHODA

In einer früheren Arbeit[1] haben wir bewiesen: Eine Matrix mit der Determinante 1 in einem Körper K lässt sich als Kommutator zweier Matrizen in K darstellen, wenn K unendlich viele Element enthält und, wenn K die Eigenwerte der Matrix enthält. Eine Matrix mit der Determinante 1 in einem reell-abgeschlossenen Körper K lässt sich als Produkt zweier Kommutatoren in K darstellen. In der vorliegenden Note nehmen wir nur an, daß der Grundkörper K unendlich viele Elemente enthält und wir beweisen den folgenden Satz, der die oben angegebenen beiden Sätze enthält.

Satz 1. *Ist die Determinant einer Matrix A in einem Körper K gleich 1, so lässt sich A als das Produkt von N Kommutatoren darstellen, wo N das Maximum der Grade der Eigenwerte von A bedeutet.*

Ein irreduzibles Polynom heisst *zyklischartig*, wenn es separabel, galoissch ist und, wenn ein Wurzel α als Quotient $\alpha=\beta/\beta'$ zweier konjugierten Elemente β, β' aus $K(\alpha)$ darstellbar ist. Dann ist der Norm von α ersichtlich gleich 1.

Wir beweisen zunächst

Hilfssatz. *Ist die charakteristische Determinante einer Matrix A in K zyklischartig, so lässt sich A als ein Kommutator zweier Matrizen in K darstellen.*

Wir nehmen an, daß A schon die Normalform

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

hat. Man setze

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad A_0=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

1) K. Shoda, Einige Sätze über Matrizen, Jap. Journal of Math. **13** (1937), 361–365.