Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 3, No. 1, May, 1951.

Zur Geschlechtertheorie in quadratischen Zahlkörpern

Helmut HASSE

Die Theorie der Geschlechter in quadratischen Zahlkörpern wurde—als Theorie der Geschlechter quadratischer Formen—von *Gauss* in seinen Disquisitiones Arithmeticae entwickelt. Ihre Verallgemeinerung auf beliebige relativ-zyklische Zahlkörper von Primzahlgrad bildet ein wesentliches Hilfsmittel beim Aufbau der allgemeinen Klassenkörpertheorie, nämlich für den Beweis der dortigen grundlegenden Ungleichung $h \geqq n$ zwischen dem Grad n des betrachteten zyklischen Relativkörpers und dem Index h der ihm zugeordneten Divisorengruppe im Grundkörper. Dies gilt sowohl für den ursprünglichen Beweis von *Takagi*[1], als auch für den neuerdings auf veränderter Grundlage gegebenen Beweis von *Chevalley*[2], bei dem letzteren allerdings in mehr versteckter Gestalt als bei dem ersteren.

Die in diese Beweise eingehenden Schlüsse aus der Geschlechtertheorie haben im wesentlichen abzählenden Charakter. Der einfache begriffliche Kern der Theorie, die dort nur Hilfsmittel, nicht Selbstzweck ist, tritt bei ihnen gar nicht hervor. Ist man einmal im Besitz der Hauptsätze der Klassenkörpertheorie, so lässt sich die Geschlechtertheorie ganz einfach in durchsichtiger, rein begrifflicher Gestalt herausarbeiten. Das soll in dieser kurzen Note für den klassischen Spezialfall der quadratischen Zahlkörper geschehen.

Anlass zu dieser Note ist eine von *Artin* bemerkte Unrichtigkeit in einer früheren Arbeit von mir.[3] Ich komme darauf am Schluss zurück.

1. Sei P der rationale Zahlkörper, $\Omega=\mathsf{P}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante d, und K sein absoluter Klassenköper im engeren Sinne, d.h, der Gruppe E aller Hauptdivisoren von Ω mit positiver Norm zugeordnet. Nach der Klassenkörpertheorie ist K der grösste über Ω abelsche unverzweigte Körper. Wir fragen nach dem grössten sogar über P abelschen, über Ω unverzweigten Körper Γ; er heisse der *Geschlechterkörper* von Ω.

---

1) *T. Takagi*, Über eine Theorie des relativ-Abelschen Zahlkörpers, Journ. Coll. Science, Tokyo **41** (1920), Art. 9, 1-131.

2) *Cl. Chevalley*, La théorie du corps de classes, Ann. of Math. **41** (1940), 394–418.

3) *H. Hasse*, Zum Hauptidealsatz der komplexen Multiplikation, Monatsh. Math. Phys. **38** (1931), 315-322.