Journal of the Mathematical Society of Japan Vol. 1, No. 2, July, 1949.

Über die Quotientenbildung von Schiefringen.

Keizo ASANO.

(Received Nov. 28, 1947)

Es ist bekanntlich ein im allgemeinen noch nicht gelöstes Problem, einen nicht kommutativen Ring in einem Quotientenbereich einzubetten. In einer früheren Arbeit[1] habe ich eine gewisse Quotientenbildung von Schiefringen untersucht. In der vorliegenden Note soll das Hauptresultat jener Arbeit etwas verallgemeinert und mit einem anderen Beweis ergänzt werden.

Definition 1. Es sei $\mathfrak{o}$ ein Nichtnullteiler enthaltender Schiefring und $\mathfrak{m}$ sei eine Halbgruppe, welche aus gewissen Nichtnullteiler von $\mathfrak{o}$ besteht. Ein Erweiterungsring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{o}$ heisst ein linksseitiger Quotientenring von $\mathfrak{o}$ nach $\mathfrak{m}$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\mathfrak{S}$ hat das Einselement 1.
2. Die Elemente von $\mathfrak{m}$ sind Einheiten von $\mathfrak{S}$.
3. Für jedes x aus $\mathfrak{S}$ gibt es ein λ aus $\mathfrak{m}$ mit $\lambda x \in \mathfrak{o}$.

Jedes Element x aus $\mathfrak{S}$ lässt sich also in der Form $\lambda^{-1}a(\lambda \in \mathfrak{m},\ a \in \mathfrak{o})$ darstellen. Hat $\mathfrak{o}$ ein linksseitiges (rechtsseitiges) Einselement e, so stimmt es mit dem Einselement 1 von $\mathfrak{S}$ überein. Ist nämlich λ ein Element von $\mathfrak{m}$, so ist

$$e = e \cdot 1 = e\lambda\lambda^{-1} = \lambda\lambda^{-1} = 1. \quad (e = 1 \cdot e = \lambda^{-1}\lambda e = \lambda^{-1}\lambda = 1)$$

Hilfssatz 1. Wenn es für jedes $\lambda \in \mathfrak{m}$ und jedes $a \in \mathfrak{o}$ ein $a' \in \mathfrak{o}$ und ein $\lambda' \in \mathfrak{m}$ mit $a'\lambda = \lambda' a$ gibt, so gibt es für endlich viele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ aus $\mathfrak{m}$ ein $\mu \in \mathfrak{m}$, so dass $\mu = c_1\lambda_1 = \ldots\ldots = c_n\lambda_n (c_i \in \mathfrak{o})$.

Beweis. Es sei für $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_{n-1}$ ein μ' mit $\mu' = c_1'\lambda_1 = \ldots\ldots = c_{n-1}'\lambda_{n-1}$ gegeben. Für μ' und λ_n gibt es dann ein $\gamma \in \mathfrak{m}$ und ein $c_n \in \mathfrak{o}$ mit $c_n\lambda_n = \gamma\mu'$. Es gilt also $\mu = \gamma\mu' = c_1\lambda_1 = \ldots\ldots = c_n\lambda_n (c_i = \gamma c_i',\ i = 1, \ldots\ldots n-1)$.

Satz 1. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass es einen linksseitigen Quotientenring $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{o}$ nach $\mathfrak{m}$ gibt, ist, dass es für jedes $\lambda \in \mathfrak{m}$ und jedes $a \in \mathfrak{o}$ ein $a' \in \mathfrak{o}$ und ein $\lambda' \in \mathfrak{m}$ mit $a'\lambda = \lambda' a$ gibt. $\mathfrak{S}$ wird dabei

(1) K. Asano, Arithmetisehe Idealtheorie in nichtkommutativen Ringen, Jap. Journ. of Math. **16** (1939).