J. Math. Soc. Japan
Vol. 50, No. 3, 1998

Analyse harmonique pour certaines représentations induites d'un groupe de Lie nilpotent

By Hidenori FUJIWARA

(Received July 10, 1995)
(Revised Oct. 7, 1996)

§ 1. Introduction et généralités

Dans cet article nous allons proposer de continuer une suite des études qui remontent à la thése de Benoist [1]. Soit $G=\exp\mathfrak{g}$ un groupe de Lie nilpotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Etant donnés un sous-groupe fermé connexe $H=\exp\mathfrak{h}$ de G, ayant l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, et son caractère unitaire χ, on considère la représentation induite $\tau=\mathrm{ind}_H^G\chi$ de G. Elle se réalise par translation à gauche dans l'espace $\mathscr{H}_\tau$ des fonctions mesurables $\varphi: G\to \mathrm{C}$ telles que $\varphi(gh)=\chi(h)^{-1}\varphi(g)$ $(g\in G, h\in H)$ et que $\int_{G/H}|\varphi(g)|^2\,d\dot{g}<\infty$ pour une mesure invariante $d\dot{g}$ sur G/H.

Si l'on écrit la désintégration de τ:

$$\tau\cong\int_{\hat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi\,d\mu(\pi), \tag{1}$$

les multiplicités $m(\pi)$ et la mesure μ sur le dual unitaire $\hat{G}$ de G s'obtiennent en termes de la méthode des orbites (cf. [4], [9]). Le caractère χ s'écrit $\chi(\exp X)=e^{if(X)}=\chi_f(\exp X)$ $(X\in\mathfrak{h})$ pour une certaine forme linéaire $f\in\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{g}$ telle que $f([\mathfrak{h},\mathfrak{h}])=\{0\}$. Alors la mesure μ est l'image par l'application de Kirillov (cf. [5], [13]) d'une mesure finie sur $\mathfrak{g}^*$ équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\Gamma_\tau=f+\mathfrak{h}^\perp$, où $\mathfrak{h}^\perp=\{l\in\mathfrak{g}^*: l\mid\mathfrak{h}=0\}$. Et la multiplicité $m(\pi)$ est égale au nombre des H-orbites contenues dans $\Omega(\pi)\cap\Gamma_\tau$, où $\Omega(\pi)=\Omega_G(\pi)$ désigne l'orbite coadjointe de G associée à $\pi\in\hat{G}$.

On se trouve dans l'alternative suivante: ou bien il existe un borne uniforme pour toutes les multiplicités $m(\pi)$ ou bien $m(\pi)=\infty$ pour π quelconque. Dans toute la suite il nous s'agit du cas où $m(\pi)$ sont finies.

Pour une représentation unitaire ρ de G, on note $\mathscr{H}_\rho$, $\mathscr{H}_\rho^\infty$ et $\mathscr{H}_\rho^{-\infty}$ respectivement l'espace de ρ, l'espace des vecteurs C^∞ de ρ et l'antidual de $\mathscr{H}_\rho^\infty$. Pour $a\in\mathscr{H}_\rho^{\pm\infty}$ et $b\in\mathscr{H}_\rho^{\mp\infty}$, on note $\langle a,b\rangle$ l'image de b par a. Donc $\langle a,b\rangle=\overline{\langle b,a\rangle}$. On pose

$$(\mathscr{H}_\rho^{-\infty})^{H,\chi}=\{a\in\mathscr{H}_\rho^{-\infty}:\rho(h)a=\chi(h)a, h\in H\}.$$

Dans cette situation il y a (cf. [11]) une question concernant une sorte de réciprocité: $\dim(\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^{H,\chi}$ se qualifie-t-elle pour la multiplicité m(π) dans la désintégration (1)? On établira plus loin une version affaiblie de cette réciprocité dans un cas bien particulier, c'est-à-dire dans le cas symétrique nilpotent.

Soit e l'élément neutre de G. On sait (cf. [16]) que $\mathscr{H}_\tau^\infty\subset C^\infty(G)$ et que $\delta_\tau:\mathscr{H}_\tau^\infty\to\boldsymbol{C}$, $\delta_\tau(\psi)=\overline{\psi(e)}$, définit un élément de $(\mathscr{H}_\tau^{-\infty})^{H,\chi}$. Penney [15] a montré que la