J. Math. Soc. Japan
Vol. 50, No. 1, 1998

Majorations explicites du résidu au point 1 des fonctions zêta de certains corps de nombres

By Stéphane LOUBOUTIN

(Received Dec. 19, 1994)
(Revised Dec. 22, 1995)

1. Majoration du résidu au point 1 des fonctions zêta des corps de nombres totalement réels.

Le résultat suivant améliore notablement [**Sun**, Lemma 2.1]. C'est par soucis de concision et parce que nous n'envisageons de ne l'utiliser que sous cette hypothèse que nous supposons $\boldsymbol{K}$ totalement réel.

THÉORÈME 1. *Soit $\boldsymbol{K}$ un corps de nombres totalement réel de degré $n \geq 2$, de discriminant $d_{\boldsymbol{K}}$, de régulateur $R_{\boldsymbol{K}}$, de nombre de classes d'idéaux $h_{\boldsymbol{K}}$ et de résidu au point 1 de sa fonction zêta de Dedekind noté* $\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}})$. *Alors, $d_{\boldsymbol{K}}^{1/n} \geq e$ pour $\boldsymbol{K} \neq \boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$, et*

$$\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}}) \leq \left(\frac{e \log d_{\boldsymbol{K}}}{2(n-1)}\right)^{n-1} \quad et \quad h_{\boldsymbol{K}} R_{\boldsymbol{K}} \leq \sqrt{d_{\boldsymbol{K}}}\left(\frac{e \log d_{\boldsymbol{K}}}{4(n-1)}\right)^{n-1}.$$

PREUVE. La minoration $d_{\boldsymbol{K}}^{1/n} \geq e$ pour $\boldsymbol{K} \neq \boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$ découle des résultats de [**Odl**]. Nous posons

$$s_0 \stackrel{def}{=} 1 + \frac{2n-2}{\log d_{\boldsymbol{K}}}$$

et remarquons que nous avons donc $1 < s_0 \leq 3$. Soit $s > 1$. D'après [**Lan**, preuve du **Th. 4**, page 261], nous avons

$$s(s-1) d_{\boldsymbol{K}}^{(s-1)/2} \Gamma^n(s/2) \pi^{-ns/2} \zeta_{\boldsymbol{K}}(s) \geq \mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}}).$$

Puisque $\zeta_{\boldsymbol{K}}(s) \leq (\zeta(s))^n \leq (s/(s-1))^n$, nous avons:

$$\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}}) \leq \frac{d_{\boldsymbol{K}}^{(s-1)/2}}{(s-1)^{n-1}} f_n(s) \quad \text{avec} \quad f_n(s) = s^{n+1} \pi^{-ns/2} \Gamma^n(s/2).$$

Nous remarquons que le premier terme de cette majoration est minimal pour $s = s_0$ et qu'il est alors égal au majorant de $\mathrm{Res}_{s=1}(\zeta_{\boldsymbol{K}})$ donné à ce Théorème 1. Nous majorons donc maintenant $f_n(s_0)$ par 1. Pour cela, nous notons $\gamma = 0.577\ldots$ la constante d'Euler et remarquons que le produit infini de la fonction Γ donne

$$\frac{2s}{n} \frac{f_n'}{f_n}(s) = \frac{2}{n} - s(\log \pi + \gamma) + \sum_{k \geq 1} \left(\frac{s}{k} - \frac{s}{k + (s/2)}\right) \stackrel{def}{=} g_n(s).$$

Mathematics Subject Classification. Primary 11R42; Secondary 11R29, 11R21.
Keywords. zeta function, CM-field, class number.