J. Math. Soc. Japan
Vol. 49, No. 4, 1997

Remarques sur l'ensemble de zero d'une solution d'une équation parabolique en dimension d'espace 1

Par Kinji WATANABE

(Received Feb. 21, 1994)
(Revised Nov. 20, 1995)

1. Introduction.

Soit u une solution non triviale et à valeurs réelles de l'équation parabolique :

$$u_t = u_{xx} + q(x, t)u \qquad \text{dans} \quad]0, 1[\times]0, T[\tag{1.1}$$

vérifiant

$$u_x(j, t) + g_j(t)u(j, t) = 0 \qquad \text{sur} \quad \{j = 0, 1\} \times]0, T[. \tag{1.2}$$

Ici q (resp. g_j) appartient à $\boldsymbol{L}^{\infty}(]0, 1[\times]0, T[)$ (resp. $\boldsymbol{C}^1(]0, T[)$). L'étude sur l'ensemble de zero $Z(u)$ de u :

$$Z(u) = \{(x, t) \in [0, 1]\times]0, T[\,;\ u(x, t) = 0\}$$

et surtout la finitude et la décroissance du nombre des zeros de $u(\cdot, t)$ a été effectuée, par exemple, par Angenent [**2**] et Kunisch et Peichl [**5**] et appliquée aux dynamiques des équations paraboliques et semilinéaires, par exemple, par Angenent et Fiedler [**3**], Matano [**8**, **9**] et Nickle [**11**]. Nous nous intéressons aux propriétés géométriques de $Z(u)$ près d'un point de sa partie singulière $S(u)$:

$$S(u) = \{(x, t) \in Z(u)\,;\ u_x(x, t) = 0\}.$$

Précisons les notations que nous utilisons. Pour une courbe Γ dans $\boldsymbol{R}^2$ on dit qu'elle est une t-courbe (resp. x-courbe) de classe $\boldsymbol{C}^k$ et définie dans un segment I si $\Gamma = \{(\gamma(t), t)\,;\ t \in I\}$ (resp. $\{(x, \gamma(x))\,;\ x \in I\}$) pour certaine γ dans $\boldsymbol{C}^k(I)$. Dans ce cas γ s'appelle la fonction de définition de Γ. Soient $\lambda_{m,j}$, $|j| \leq [m/2]$, les raçines du polynôme $H_m(z)$ d'Hermite de degré m et nous les arrengeons de la manière suivante.

$$\lambda_{m,-l} < \cdots < \lambda_{m,-1} < \lambda_{m,0} = 0 < \lambda_{m,1} < \cdots < \lambda_{m,l}.$$

Ici $l = [m/2]$ et nous avons d'éliminer $\lambda_{m,0}$ au cas de m pair.

Cette recherche a été partiellement supportée par "Grant-in-Aid for Scientific Research (No. 0564187), Ministry of Education, Science and Culture".