J. Math. Soc. Japan
Vol. 46, No. 3, 1994

Classes généralisées invariantes

By Georges GRAS

(Received Feb. 22, 1993)

Introduction.

Soit K/k une extension cyclique de corps de nombres, de groupe de Galois G, et soit L une extension abélienne finie de K, galoisienne sur k. Nous donnons une formule explicite pour $\sharp \mathrm{Gal}(L/K)^G$, qui est aussi le degré sur K du sous-corps maximal de L, abélien sur k (cf. (2.7) à (2.10)). Cette formule généralise celle de [**G**], [**H-L**], [**J**]. Une application standard d'une telle formule est la détermination de la structure d'un p-groupe de classes généralisé $C\ell_{K,\mathfrak{m}}$, dans une extension cyclique K/k de degré p, au moyen du calcul de la filtration $(M_i)_{i\geq 0}$ définie par $M_{i+1}/M_i=(C\ell_{K,\mathfrak{m}}/M_i)^G$ et $M_0=1$.

Notre approche diffère des approches connues dans la mesure où nous réalisons une "translation" d'une formule classique de classes invariantes (par ex. de C. Chevalley, Y. Furuta, $\cdots$) au moyen de la suite exacte (2.3).

0. Remarque préliminaire.

Nous adoptons ici un point de vue introduit dans [**J**] par J.-F. Jaulent qui raisonne en termes de classes de diviseurs des corps de nombres, les diviseurs étant en bijection avec les places, et qui parle de "complexification" de places réelles au lieu de ramification ; cependant, nous n'écrirons que des groupes de classes d'idéaux (ce qui est toujours possible, à condition de bien préciser le rôle des places à l'infini) et dirons qu'une place "complexe" au-dessus d'une place "réelle" a un degré résiduel égal à 2.

Il est commode, en dépit des habitudes prises, d'écrire le corps de classes selon ces définitions ; en particulier, pour un corps de nombres F, c'est le corps de classes de Hilbert (correspondant à la non ramification des idéaux premiers) qui joue un rôle pivot dans le treillis des extensions $F_S^{(\mathfrak{m})}$ de F qui sont les sous-extensions S-décomposées maximales des corps de rayons $F^{(\mathfrak{m})}$ au sens restreint, où S est un ensemble de places de F et $\mathfrak{m}$ un idéal entier non nul de F. Bien entendu, dans ce cadre, les invariants au sens ordinaire se retrouvent en imposant que S contienne l'ensemble des places à l'infini de F.

1. Groupes de classes généralisés.

Soit donc F un corps de nombres. Dans toute la suite, $\mathfrak{m}$ désigne un module fini de F, c'est-à-dire un idéal entier non nul de F, et T désigne l'ensemble des