J. Math. Soc. Japan
Vol. 46, No. 1, 1994

Estimation des fonctions d'aire sur les variétés riemanniennes à courbure non positive

par Noël LOHOUE

(Reçu le 17 déc., 1991)
(Revisé le 1 octobre, 1992)

Dans notre travail [2] "Estimation des fonctions de Littlewood-Paley-Stein sur les variétés riemanniennes à courbure non positive" nous nous sommes occupés des estimées d'une famille à un paramétre g_α de fonctions de Littlewood-Paley-Stein, qui nous ont conduit à l'étude des fonctions d'aire. Cette introduction à la fonction d'aire n'avait été qu'à peine esquissée et nous n'avions obtenu de majoration de normes que pour $p \geqq 2$ et sous certaines hypothèses sur la courbure.

Le but de ce travail est de poursuivre notre étude plus en détail et de la compléter.

Décrivons un peu le genre de résultat que l'on peut obtenir, par exemple dans le cas d'un espace symétrique de rang un, qu'on note M. Si P_t est le noyau de Poisson au-dessus de M, pour toute fonction $f: M \rightarrow \boldsymbol{C}$, C^∞ à support compact, on note $f(x, t)=\int_M f(y) P_t(x, y) d\sigma(y)$ où $d\sigma$ est la mesure riemannienne sur M, $\nabla_x f$ le gradient riemannien de f en la variable x.

On s'intéresse à la fonction

$$S_\alpha^2(f)(x)=\int_{\delta(x, y) \leq \alpha t} dt |B_y(t)|^{-1}\left(\|\nabla_x f\|^2(y, t)+\left|\frac{\partial f}{\partial t}(y, t)\right|^2\right) d\sigma(y)$$

où $|B_y(t)|$ est le volume riemannien de la boule de centre y et de rayon t. On désire prouver des estimations du style

$$\|S_\alpha(f)\|_p \simeq \|f\|_p$$

où $1<p<\infty$ dépend éventuellement de α.

La fonction S_α dans le cas de $\boldsymbol{R}$ a été introduite par Lusin pour formuler des énoncés du théorème de Fatou.

Dans le cas des espaces euclidiens elle est étudiée en long et en large au chapitre VII de [7] pour démontrer des théorèmes de multiplications à la Hörmander et caractériser les classes de Hardy H^p à la Stein et Weiss.

Fixons les notations et les énoncés des résultats.