J. Math. Soc. Japan
Vol. 43, No. 1, 1991

Espaces symétriques ordonnés et algèbres de Volterra

Par Jacques FARAUT

(Reçu le 5 fév., 1990)

L'étude des espaces symétriques ordonnés que nous présentons a été motivée par une question de mécanique quantique relativiste sur laquelle mon attention a été attirée par G. Viano. Il s'agit de l'équation de Bethe-Salpeter qui intervient dans la description des collisions de particules [**4**]. C'est une équation intégrale qui possède une propriété d'invariance par le groupe de Lorentz et une propriété de causalité.

Nous considérons d'abord la situation générale suivante: G/H est un espace homogène ordonné pour lequel les intervalles sont compacts. Il lui est associé un semi-groupe S contenu dans G tel que $S\cap S^{-1}=H$. Sous certaines hypothèses l'algèbre des noyaux causaux invariants sur G/H est commutative. Nous nous interessons ensuite au cas où l'espace homogène G/H est un espace symétrique et où l'ordre est défini par une structure causale invariante globale. D'après un résultat de Ol'shanskii [**12**], c'est le cas si l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H est hermitienne et si celle de G est la complexifiée de $\mathfrak{h}$. Nous montrons qu'alors les intervalles sont compacts. Nous décrivons ensuite de nombreux exemples d'espaces symétriques qui sont des variétés causales globales pour lesquels les intervalles sont compacts et l'algèbre des noyaux causaux invariants est commutative. Nous montrons enfin que ces espaces symétriques sont des variétés causales globalement hyperboliques.

Dans le cadre du projet Akizuki, un séjour au département de mathématiques de l'Université Tôhoku en 1989 m'a permis de mener à bien ce travail. Il a été présenté à la réunion annuelle de la Société Mathématique du Japon en août 1989 à Tokyo. Ce travail a également bénéficié d'échanges fructueux avec K. Hofmann et J. Hilgert de la Technische Hochschule de Darmstadt.

1. Espaces homogènes ordonnés.

Soient G un groupe localement compact et H un sous-groupe fermé de G. On considère sur l'espace homogène $X=G/H$ une relation d'ordre partiel invariant par G,

$$\forall g\in G,\ x\geqq y \Longleftrightarrow gx\geqq gy .$$

On suppose que le graphe