J. Math. Soc. Japan
Vol. 41, No. 3, 1989

Untersuchung Selbergscher Zetafunktionen

Von Ulrich CHRISTIAN

(Eingegangen am Mai 23, 1988)

§ 0. Einleitung.

Bei dem Versuch, den Rang der Schar der Spitzenformen zu elliptischen Modulgruppen auch für kleine Gewichte g mittels der Selbergschen Spurformel zu berechnen, wird man auf das Problem geführt, die Selbergsche Zetafunktion (zur Bezeich s. Christian [37])

$$\zeta(q, g, s)=\sum_{\substack{\{P\}\mathcal{M}(q) \\ |\operatorname{Tr} P|>2}}(\operatorname{sign} \operatorname{Tr} P)^{g} \frac{\log N(P_{0})}{N(P)^{1/2}-N(P)^{-1/2}}\left(2 \cosh \frac{1}{2} \log N(P)\right)^{-2s}$$

auf meromorphe Fortsetzbarkeit in die s-Ebene zu untersuchen. Dabei ist $\mathcal{M}(q)$ die Hauptkongruenzgruppe q-ter Stufe zur elliptischen Modulgruppe. $\{P\}_{\mathcal{M}(q)}$ durchläuft die Konjugiertenklassen der hyperbolischen Elemente aus $\mathcal{M}(q)$, weiter ist P_0 das zu P gehörige primitive Element und $N(P)$ die Norm von P; schließlich bezeichnet s eine komplexe Variable und Tr die Spur.

Die Funktion $\zeta(q, g, s)$ tritt auch schon bei Hiramatsu [19], [20], § 5.2, (8) und bei Hiramatsu und Akiyama [21] auf.

In diesen Arbeiten wird aber nur der Fall $g=1$ betrachtet und die Funktion $\zeta(q, g, s)$ wird nur in einer Umgebung des Nullpunktes untersucht. Wir lassen alle $g\in\boldsymbol{Z}$ zu und untersuchen $\zeta(q, g, s)$ in der ganzen s-Ebene. Wir zeigen, daß $\zeta(q, g, s)$ nur Pole erster Ordnung besitzt. Diese Resultate wurden unabhängig von [15] bis [23] gewonnen.

Wir werden uns in dieser Arbeit weitgehend auf Fischer [11] stützen. Allerdings betrachtet Fischer nur Gruppen, die das Element $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ enthalten. Bei uns gilt $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\notin\mathcal{M}(q)$ $(q\geqq 3)$. Das hat einige kleine Abänderungen zur Folge. Insbesondere erscheint durch diesen Unterschied der Term $(\operatorname{sign}\operatorname{Tr} P)^{g}$ unter der Summe von $\zeta(q, g, s)$. Wir werden $\zeta(q, g, s)$ für jedes Gewicht g meromorph fortsetzen. Beachten wir dann, daß $\zeta(q, g, s)$ nur von der Restklasse $g \bmod 2$ abhängt, so ergeben sich explizite Formeln für die Ränge der Scharen der Spitzenformen vom Gewicht g.

Schließlich betrachten wir statt $\zeta(q, g, s)$ zunächst die Funktion