J. Math. Soc. Japan
Vol. 37, No. 2, 1985

Fonctions hypergéométriques F_1 et fonctions automorphes II. Groupes discontinus arithmétiquement définis

Dédié au professeur Y. Kusunoki, à l'occasion de son soixantième anniversaire

Par Toshiaki TERADA

(Reçu le 4 mars, 1981)
(Revisé le 8 août, 1983)

Introduction.

Pour obtenir le groupe modulaire elliptique G, il existe deux méthodes. L'une des définitions est arithmétique: G est le groupe de transformations linéaires fractionnaires donné par

$$G_{ar}=\left\{T\in GL(2, \boldsymbol{Z})\,\middle|\, T^*\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

L'autre est analytique ou géométrique. En partant de deux solutions

$$\omega_1(x)=\int_0^x du/v \quad \text{et} \quad \omega_2(x)=\int_0^1 du/v \quad (\text{avec } v=\sqrt{u(u-x)(u-1)})$$

de l'équation différentielle hypergéométrique

$$x(x-1)y''+(2x-1)y'+y/4=0,$$

on a d'abord la fonction automorphe $x=\lambda(\tau)$ avec $\tau=\omega_1/\omega_2$ et puis en divisant le domaine fondamental par un groupe fini de transformations linéaires fractionnaires, on arrive au nouveau groupe G_{an} et à la nouvelle fonction automorphe

$$J(\tau)=4(\lambda^2-\lambda+1)^3/27\lambda^2(\lambda-1)^2.$$

La première définition G_{ar} est très claire et il en est de même du rapport à la théorie des nombres. Mais elle n'est pas commode pour étudier les générateurs du groupe, le domaine fondamental, la fonction-même ou les relations avec les courbes elliptiques. Cependant la deuxième G_{an} est tout l'opposé. Donc il est à désirer qu'un groupe discontinu soit, si possible, défini par ces deux méthodes.

Or, d'une part, quant aux groupes analytiquement définis, Schwarz [**6**] avait établi que, lorsque ω_1 et ω_2 sont des solutions convenables de l'équation différentielle hypergéométrique