J. Math. Soc. Japan
Vol. 36, No. 4, 1984

Sur le dual d'un groupe de Lie résoluble exponentiel

Par Hidénori FUJIWARA

(Reçu le 28 oct., 1983)

§ 0. Introduction.

Soit G un groupe de Lie résoluble exponentiel, connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. G agit dans l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ par la représentation coadjointe et il est bien connu que le dual $\hat{G}$, l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles, de G est paramétré par l'espace des orbites $\mathfrak{g}^*/G$ (cf. [**1**], [**12**]).

On munit $\hat{G}$ de la topologie de Fell [**7**] et $\mathfrak{g}^*/G$ de la topologie quotient. Depuis que Kirillov [**12**] a annoncé cette méthode des orbites dans la théorie de représentations unitaires d'un groupe de Lie nilpotent, il est bien conjecturé que l'application de Kirillov $\rho_G: \mathfrak{g}^*/G \to \hat{G}$ est un homéomorphisme.

On va y donner dans cette note un résultat partiel: il existe dans $\mathfrak{g}^*/G$ une partie ouverte partout dense où ρ_G est un homéomorphisme, et dont l'image par ρ_G est aussi ouverte dense dans $\hat{G}$.

Groupons des résultats connus sur cette conjecture.

1. L'application de Kirillov est continue [**12**], [**14**].
2. La conjecture est vérifiée pour le cas nilpotent [**4**], [**11**].
3. Pour $f \in \mathfrak{g}^*$, posons $\mathfrak{m}(f) = \mathfrak{g}(f) + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ avec $\mathfrak{g}(f) = \{X \in \mathfrak{g}\,;\, f([X, Y]) = 0$ quel que soit $Y \in \mathfrak{g}\}$. On considère la suite centrale descendante de $\mathfrak{m}(f)$:

$$\mathfrak{m}^0(f) = \mathfrak{m}(f) \supset \mathfrak{m}^1(f) = [\mathfrak{m}(f), \mathfrak{m}(f)] \supset \cdots \supset \mathfrak{m}^k(f) = [\mathfrak{m}(f), \mathfrak{m}^{k-1}(f)] \supset \cdots.$$

La conjecture est alors établie à condition que $f\Big(\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}^k(f)\Big) = 0$ pour $f \in \mathfrak{g}^*$ quelconque [**3**].

4. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie complètement résoluble de dimension 4 définie sur la base (T, X, Y, Z) par les crochets $[T, X] = -X$, $[T, Y] = Y$, $[X, Y] = Z$. Alors $G = \exp \mathfrak{g}$ est le plus simple des groupes qui ne satisfont pas à l'hypothèse du résultat précédent. En faisant usage de la continuité des caractères infinitésimaux [**2**], Rosenberg a montré la conjecture pour G et il m'a tenu au courant du fait que cette méthode avait récemment permis à Boidol de trouver le même résultat pour des groupes de dimension inférieure ou égale à 5.

Cette recherche a été partiellement supporté par "Grant-in-Aid for Scientific Research (No. 56740039), Ministry of Education".