J. Math. Soc. Japan
Vol. 35, No. 3, 1983

Fonctions hypergéométriques F_1 et fonctions automorphes I

Par Toshiaki TERADA

(Reçu le sept. 24, 1980)
(Revisé le avril 13, 1982)

Introduction.

Les propriétés intéressentes de la fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ont donné naissance à beaucoup de fruits de l'analyse, dont l'un des plus beaux sera le résultat dû à H. A. Schwarz [10]. Soit $\omega_1(x)$ et $\omega_2(x)$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta-1)x]y'+\alpha\beta y=0$$

vérifiée par $F_1(\alpha, \beta, \gamma, x)$ et supposons que $\gamma-1$, $\alpha-\beta$ et $\gamma-\alpha-\beta$ soient contenus dans

$$\boldsymbol{Z}^{-1}=\{1/\lambda \mid \lambda \text{ est un entier sauf } \pm 1 \text{ ou l'infini}\} .$$

Alors la fonction inverse de $\tau(x)=\omega_1(x)/\omega_2(x)$ est uniforme et elle définit une fonction automorphe sur un domaine isomorphe à la sphère de Riemann, le plan complexe ou le cercle unité. Le groupe est induit par le groupe de monodromie de cette équation et le domaine fondamental est l'image par $\tau(x)$ de la sphère de Riemann avec une coupure passant en 0, 1, ∞. Si $\alpha=\beta=1/2$, $\gamma=1$, c'est la fonction modulaire elliptique $x=\lambda(\tau)$.

Après qu'Appell a présenté les séries hypergéométriques à deux variables, E. Picard [6]$\sim$[9] a généralisé le travail de Schwarz au cas de deux variables en utilisant $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$, mais la démonstration ne semble pas tout à fait complète. L'inverse de l'application sur l'espace projectif définie par les trois solutions linéairement indépendantes du système d'équations différentielles vérifiées par F_1 est uniforme si tout $\lambda_i+\lambda_j-1$ $(i, j=0, 1, 2, 3, \infty, i\neq j)$ est élément de $\boldsymbol{Z}^{-1}$ où $\lambda_1=1-\beta$, $\lambda_2=1-\beta'$, $\lambda_\infty=\alpha$, $\lambda_3=\gamma-\alpha$, $\lambda_0=3-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_\infty)$; et elle donne un corps de fonctions automorphes. Le Vavasseur [3] a trouvé tous les assortiments des paramètres qui remplissent ces conditions. Ensuite l'auteur s'y est occupé au cas de n variables mais ne l'a pas encore parachevé.[1]

1) On n'a traité que les cas où $n=2$ et $\lambda_i+\lambda_j-1\geqq 0$ et où $n=3$ et $\lambda_i=2/3$. Et de plus la démonstration était incomplète si le domaine fondamental est non-compact. D'ailleurs, G.D. Mostow [4] annonce qu'il l'a démontré au cas où $n=2$ et $\lambda_i+\lambda_j-1\geqq 0$.