J. Math. Soc. Japan
Vol. 33, No. 4, 1981

Majoration du nombre de classes d'un corps cubique cyclique de conducteur premier

Par C. MOSER et J. J. PAYAN

(Reçu le 8 août, 1980)

1. Motivations et notations.

La "conjecture" de Vandiver affirme que le nombre de classes h^{+} du sous-corps réel maximal $\boldsymbol{Q}_0^{(p)}$ de $\boldsymbol{Q}^{(p)}$ corps cyclotomique d'indice premier p, n'est pas divisible par p. Ceci s'exprime dans la terminologie d'Iwasawa en disant que tout nombre premier p est ou bien régulier ou bien proprement irrégulier. On sait par ailleurs que le nombre de classes de toute extension intermédiaire de $\boldsymbol{Q}_0^{(p)}/\boldsymbol{Q}$ divise h^{+}, il en résulte que la conjecture suivante est plus faible que celle de Vandiver : p ne divise pas le nombre de classes de l'extension cyclique réelle de degré premier l et de conducteur p pour tout nombre premier l diviseur de $p-1$.

Nous envisageons ici le cas $l=3$; p désigne désormais un nombre premier congru à 1 modulo 3 et K le corps cubique cyclique de conducteur p. On note χ un caractère cubique non principal modulo p, $\tau(\chi)$ la somme de Gauss attachée à p ($\tau(\chi)=\sum_{x \bmod p} \chi(x)e^{2i\pi x/p}$), $h(K)$ le nombre de classes d'idéaux de K, $R(K)$ son régulateur, $\zeta_K(s)$ la fonction zeta associée à K et $L(s, \chi)$ la fonction L associée au caractère χ.

2. Formule analytique du nombre de classes et minoration du regulateur.

La formule analytique du nombre de classes, appliquée au corps K de discriminant p^2, s'écrit :

$$\lim_{s\to 1^+} \frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)} = |L(1, \chi)|^2 = \frac{4}{p} h(K)R(K)$$

avec $L(1, \chi)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}$. On peut pour plus de détails se reporter à [3] chapitre 3, § 3.

On va démontrer que $h(K)$ est strictement inférieur à p et utiliser le résultat suivant :