J. Math. Soc. Japan
Vol. 32, No. 2, 1980

Regularitätsfragen für die instationären Navier-Stokesschen Gleichungen in höheren Dimensionen

By Wolf VON WAHL

(Eingegangen am 21. Juni 1978)
(Verbessert am 18. Juni 1979)

I. Einleitung und Bezeichnungen.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns im zweiten Teil (Kap. V und VI) mit einem von Serrin und Prodi (für eine zusammenhängende Darstellung s. [5]) behandelten Problem. Diese Autoren bewiesen, daß es für n=2, 3, 4 *genau eine* schwache Lösung der instationären Navier-Stokesschen Gleichungen

$$u'-\nu\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla p=0\,,$$
$$\nabla\cdot u=0$$
$$u|\partial\Omega=0\,,\quad u(0)=\varphi$$

über einem zylindrischen Gebiet $(0, T)\times\Omega\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ gibt, die zusätzlich $u'\in L^{\infty}((0, T), (L^{2}(\Omega))^{n})\cap L^{2}((0, T), (H^{0,1}(\Omega))^{n})$ erfüllt, sofern nur $\|\varphi\|_{(H^{2,2}(\Omega))^{n}}$ eine von ν abhängige Größe nicht überschreitet. Für $n=2$ braucht man die letzte Bedingung nicht (s. etwa [10]), für $n=3$ folgt für die so gewonnene Lösung aus bekannten Regularítätskriterien ihre Regularität (s. [4], [11]). Für $n=4$ versagen diese Kriterien jedoch gerade, da zwar $u\in C^{0}([0, T], (L^{4}(\Omega))^{4})=C^{0}([0, T], (L^{n}(\Omega))^{n})$ ist, man jedoch $u\in C^{0}([0, T], (L^{4+\varepsilon}(\Omega))^{4})$ benötigt (für $n=4$ ist hier die in [11] für Elemente $u\in L^{s}((0, T), (L^{r}(\Omega))^{n})$ eingeführte kritischen Größe $\frac{n}{r}+\frac{2}{s}=1$, während man <1 benötigt). An dieser Stelle greift nun ein Satz aus Kap. V ein, der speziell auf den Fall $\frac{n}{r}+\frac{2}{s}=1$ zugeschnitten ist. Dort wird folgendes bewiesen: Falls u_{σ}, $0\leqq\sigma\leqq 1$, eine Schar schwacher Lösungen zu den Problemen

$$P_{\sigma}\begin{cases} u'-\nu\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla p=\sigma f+(1-\sigma)g\,, \\ \nabla\cdot u=0\,, \\ u|\partial\Omega=0\,,\quad u(0)=\sigma\varphi+(1-\sigma)\psi\,, \end{cases}$$

sind, bei denen u_{0} regulär ist und die u_{σ} stetig von σ in der $L^{\infty}((0, T), (L^{n}(\Omega))^{n})$-