J. Math. Soc. Japan
Vol. 26, No. 4, 1974

Sur les l-classes d'idéaux des extensions non galoisiennes de $\boldsymbol{Q}$ de degré premier impair l a clôture galoisienne diédrale de degré $2l$

Par Georges GRAS

(Reçu le 31 mai, 1973)
(Revisé le 3 oct, 1973)

Introduction.

Dans [3], S. Kobayashi donne une intéressante construction du groupe de Galois de l'extension abélienne non ramifiée maximale d'exposant 3 du corps $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{m})$, pour certains $m \in \boldsymbol{Z}$. La valeur du 3-rang du groupe des classes de $\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{m})$ est alors une conséquence de l'étude de ce groupe de Galois.

Les résultats de Kobayashi suggèrent l'existence de relations entre les l-rangs des groupes des classes d'une extension de degré l de $\boldsymbol{Q}$ non galoisienne et de sa clôture galoisienne, lorsque celle-ci est diédrale de degré $2l$. C'est ce que nous essayons de préciser dans cette note.

Je tiens à remercier ici S. Kobayashi qui m'a communiqué ses résultats avant leur parution et le Professeur S. Iyanaga auquel je dois cet échange.

§ 1. Généralités.

Soit $L/\boldsymbol{Q}$ une extension de degré l de $\boldsymbol{Q}$ (l premier impair) non galoisienne, ayant une clôture galoisienne K diédrale de degré $2l$ sur $\boldsymbol{Q}$. On notera σ et τ des générateurs de $G = \mathrm{Gal}(K/\boldsymbol{Q})$ vérifiant les relations:

$$\sigma^l = \tau^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \sigma\tau = \tau\sigma^{-1}.$$

Soient $H = \langle\sigma\rangle$ et $T = \langle\tau\rangle$ les sous-groupes de G engendrés par σ et τ. On note k le sous-corps de K fixe par H (c'est une extension quadratique de $\boldsymbol{Q}$); on peut supposer que L est fixe par T (les l conjugués L_i de L (i défini modulo l) sont fixes par les sous-groupes $\{1, \sigma^i\tau\sigma^{-i}\}$); enfin la restriction de τ à k définit l'élément d'ordre 2 de $\mathrm{Gal}(k/\boldsymbol{Q})$.

On note A_L, A_k et A_K les anneaux d'entiers de L, k et K, $\mathfrak{J}(L)$, $\mathfrak{J}(k)$ et $\mathfrak{J}(K)$ les groupes des idéaux fractionnaires de L, k et K, $\mathcal{H}(L)$, $\mathcal{H}(k)$ et $\mathcal{H}(K)$ les l-groupes des classes des corps L, k et K. On note j l'homomorphisme canonique $\mathcal{H}(k) \to \mathcal{H}(K)$ et ν l'expression $1 + \sigma + \cdots + \sigma^{l-1}$.