J. Math. Soc. Japan
Vol. 25, No. 4, 1973

Divisibilité par 8 du nombr des classes des corps quadratiques dont le 2-groupe des classes est cyclique, et réciprocité biquadratique

Par Pierre KAPLAN

(Reçu le 30 sept., 1972)

Introduction.

Soit (C^*) d'ordre $h^*(D)$ le groupe des classes d'idéaux au sens étroit de $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$. Son 2-sous-groupe de Sylow (C_2) est cyclique d'ordre $h_2(D) \geqq 4$ dans les cas suivants:

$$D=-p \text{ ou } D=\pm 2p, \text{ avec } p \equiv 1 \pmod 8$$

$$D=-2p, \text{ avec } p \equiv -1 \pmod 8$$

$$D=\pm pq, \text{ avec } p \equiv \pm q \equiv 1 \pmod 4 \text{ et } \left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)=1.$$

Récemment, plusieurs auteurs ([1], [3], [9], [10] et [11]) ont étudié le problème de distinguer, parmi ces cas, ceux où $h^*(D)$ est divisible par 8; leurs résultats concernent surtout les cas des corps imaginaires. Il existe aussi des critères plus anciens dans [16] et [20], démontrés à l'aide de la théorie du Corps de Classes.

Le but de ce travail est de traiter ce problème *dans tous les cas* par une méthode uniforme et élémentaire, n'utilisant rien d'autre que la théorie des formes quadratiques binaires. Pour les corps *réels* nous obtenons les résultats nouveaux suivants:

1) *Cas* $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2p})$: *Soit* $p=a^2+b^2 \equiv 1 \pmod 8$ *où* $b \equiv 0 \pmod 4$.

$h^*(2p)$ est divisible par 8 si, et seulement si, $a \equiv \pm 1$ *et* $b \equiv 0 \pmod 8$.

Malgré sa simplicité et son élégance ce critère semble ne pas avoir été remarqué jusqu'à présent.

2) *Cas* $\boldsymbol{Q}(\sqrt{pq})$: *Soient* p *et* $q \equiv 1 \pmod 4$, $p=a^2+b^2$, $q=c^2+d^2$, b *et* d *pairs, et* $(p/q)=(q/p)=1$. Une et une seule des équations $t^2-pqu^2=-1, p, q$ a des solutions.

Si $t^2-pqu^2=-1$ *a des solutions:*

$$(-1)^{h^*(pq)/4}=(p/q)_4=(q/p)_4 \text{ et } (ac+bd)/p=(ac+bd)/q=1.$$