J. Math. Soc. Japan
Vol. 22, No. 3, 1970

Idealgruppen und Dirichletsche Reihen in algebraischen Zahlkörpern

Von Sige-Nobu KURODA

(Eingegangen am 29. Sept. 1969)
(Verbessert am 8. Dez. 1969)

Nach dem Fundamentalsatz der algebraischen Zahlentheorie bildet die Gesamtheit der gebrochenen Ideale eines algebraischen Zahlkörpers k eine freie abelsche Gruppe, deren Basis durch die Primideale von k gebildet wird. Dadurch erkennt man, daß die Gruppe $A_{\mathfrak{m}}$ der zu einem vorgegebenen Ideal $\mathfrak{m}$ primen Ideale von k viele Untergruppen vom endlichen Index hat. Im Jahre 1897 beschäftigte sich H. Weber [**14**] mit den in $A_{\mathfrak{m}}$ enthaltenen Idealgruppen $H_{\mathfrak{m}}$, welche der folgenden Bedingung genügen: Es bezeichne $T(x, C)$ die Anzahl der in einer Idealklasse C nach $H_{\mathfrak{m}}$ enthaltenen ganzen Ideale, deren Normen nicht größer als eine positive Größe x sind. Dann soll eine Beziehung der Form

$$T(x, C) = gx + O(x^{1-\delta})$$

bestehen, wobei g eine positive Konstante bezeichnet und δ eine nur von k abhängende positive Zahl bedeutet, welche kleiner als 1 ist. Folglich existiert der Limes $\lim_{x\to\infty} T(x, C)/x = g$ und ist von der einzelnen Idealklasse C unabhängig.

Unter dieser Voraussetzung gelten unter anderem die folgenden Tatsachen:

i) Die Klassenzahl nach $H_{\mathfrak{m}}$, d. h. der Index $(A_{\mathfrak{m}} : H_{\mathfrak{m}})$, ist endlich (Vgl. [**13**], § 2).

ii) Wenn es einen $H_{\mathfrak{m}}$ im Sinne von [**14**], § 1, Bedingung 4 zugeordneten "Klassenkörper" gibt, so enthält jede Idealklasse nach $H_{\mathfrak{m}}$ unendlich viele Primideale (Vgl. Weber a. a. 0., Behauptung III).

Dies wird bewiesen, indem man die Dirichletschen Reihen

$$L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s}$$

betrachtet, welche mit denjenigen Charakteren χ von $A_{\mathfrak{m}}$ gebildet werden, welche auf $H_{\mathfrak{m}}$ den Wert 1 annehmen, und wo $\mathfrak{a}$ alle ganzen Ideale aus $A_{\mathfrak{m}}$ durchläuft, $N\mathfrak{a}$ die Norm von $\mathfrak{a}$ nach dem Körper $\boldsymbol{Q}$ der rationalen Zahlen bezeichnet. Weber zeigte a. a. 0., daß die Kongruenzidealgruppen in der Tat der obigen Bedingung mit $\delta = 1/n$ genügen, wo n den Absolutgrad von k