J. Math. Soc. Japan
Vol. 20, Nos. 1-2, 1968

Sur une formule classique

A Shôkichi Iyanaga en toute amitié

par André WEIL

(Reçu le 7 juin, 1967)

Dans un mémoire célèbre ([2]), Hecke a établi que les séries de Dirichlet satisfaisant à un certain type d'équation fonctionnelle correspondent au moyen de la transformation de Mellin à certains types de formes modulaires; divers travaux, et tout particulièrement ceux de H. Maass, ont considérablement étendu la portée de cette méthode. D'autre part, on sait maintenant (cf. [4]) que, même sans quitter le cadre des formes modulaires usuelles, la méthode de Hecke peut être appliquée à des problèmes plus généraux que ceux qu'il avait envisagés lui-même, et tout indique qu'on peut encore aller beaucoup plus loin dans les voies ainsi tracées.

Du point de vue de Hecke, il s'agissait avant tout de ramener la recherche de séries de Dirichlet satisfaisant à des équations fonctionnelles à celle des formes modulaires correspondantes, considérées comme mieux connues. Mais la théorie a maintenant fait assez de progrès pour qu'on puisse aussi appliquer utilement les mêmes résultats en sens inverse, et mettre au service de la théorie des fonctions automorphes nos connaissances sur les séries de Dirichlet. Mon propos ici est seulement d'illustrer ce principe au moyen d'un exemple particulièrement simple, et que sans doute Hecke a dû connaître, bien que je n'en aie pas rencontré de mention explicite chez lui ni chez ses successeurs.

Considérons les fonctions

$$\varphi(s)=\zeta(s)\zeta(s+1), \qquad \Phi(s)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s).$$

L'équation fonctionnelle de la fonction zêta, jointe aux propriétés classiques de la fonction gamma, donne aussitôt pour Φ l'"équation fonctionnelle":

$$\Phi(s)=\Phi(-s).$$

Il est immédiat que Φ a un pôle double en $s=0$, des pôles simples en $s=\pm 1$, est holomorphe partout ailleurs, et est bornée pour $\sigma \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq \sigma'$, $\mathrm{Im}(s) \geqq \varepsilon$, quels que soient σ, σ' et $\varepsilon>0$. Il est clair aussi que Φ a le résidu $\zeta(2)/2\pi=\pi/12$ en $s=1$, le résidu $-\pi/12$ en $s=-1$, et que $\Phi(s)+1/2s^2$ est holomorphe en $s=0$.

La fonction φ est évidemment donnée, pour $\mathrm{Re}(s)>1$, par la série de