J. Math. Soc. Japan
Vol. 20, Nos. 1-2, 1968

Sur les groupes algébriques semi-simples déployés

Dédié à Monsieur S. Iyanaga pour son soixantième anniversaire

Par Takashi TASAKA

(Reçu le 25 janv., 1967)

§ 0. Introduction.

Dans cet article, on considère quelques problèmes concernant les groupes algébriques semi-simples, surtout dans le cas où les groupes soient définis et déployés sur un corps k.

Soit G un groupe algébrique semi-simple connexe défini sur un corps de nombres algébriques k. On construit le groupe adélique G_A de G. On désigne par G'_A le groupe des commutateurs de G_A au sens abstrait, alors le produit $G_kG'_A$ est un sous-groupe distingué de G_A au sens abstrait. Si G soit défini et déployé sur k, on démontre que les deux groupes G'_A et $G_kG'_A$ sont fermés dans G_A, et que le groupe quotient $A_k(G)=G_A/G_kG'_A$ est isomorphe au groupe abélien et compact qui est canoniquement isomorphe au produit des groupes de Galois des extensions abéliennes de k bien déterminées. Plus précisément, on désigne par J_k le groupe des idèles de k. Pour un entier positif n, nous posons

$$A_k(n)=J_k/k^*(J_k)^n\,.$$

Le groupe $A_k(n)$ est isomorphe au groupe de Galois de $K(n)$ sur k, où $K(n)$ désigne le corps composé de toutes extensions cycliques de k de degré d (d divise n). Alors on a

$$A_k(G)\cong\prod_{i=1}^{l}A_k(e_i)\,,$$

où l est le rang de G et e_i sont des diviseurs élémentaires de l'opérateur qui est déterminé par l'isogénie universelle de G.

Soit S un sous-ensemble fini de l'ensemble V des places de k contenant toutes places infinies de k. Si G soit un groupe algébrique linéaire défini sur k, on pose

$$G_S=\prod_{v\in S}G_v\,,$$

$$G_{A(S)}=G_S\times\prod_{v\notin S}G_{\mathfrak{O}_v}\,.$$

Si G soit semi-simple et si G_S ne soit pas compact, $G_kG_{A(S)}$ contient le groupe