J. Math. Soc. Japan
Vol. 19, No. 4, 1967

Mittelwerteigenschaften der Riemannschen Zeta-Funktion

von Friedhelm GOTZE

(Eingegangen am 22. Dez. 1966)

1. Einführung

Das Wachstumverhalten der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$ längs der kritischen Geraden $\mathrm{Re}(s)=\sigma=\frac{1}{2}$ findet seinen analytischen Ausdruck in dem von Atkinson [1] bewiesenen Mittelwert

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\frac{\delta}{\log\delta}\int_0^\infty\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 e^{-\delta t}dt\right\}=-1, \tag{1.1}$$

welcher — leicht modifiziert — bereits bei Hardy und Littlewood [3] vorkommt. Einen hiervon unabhängigen Zugang gab W. Maier [4] durch Einführung der Gitterfunktion

$$V\binom{s}{\omega}=\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(h+\omega k)^{-s} \qquad (\sigma>2,\ |\arc\omega|<\pi). \tag{1.2}$$

Sie hat — was in [2] gezeigt wurde — den singulären Halbstrahl $\omega<0$ und ist in s meromorph.

In der vorliegenden Note[1] wird mit Hilfe einer Gitterfunktion höherer Stufe, d. h. mehrerer Parameter, eine Verallgemeinerung von (1.1) angestrebt. Wir zitieren vorwegnehmend den etwas mühsam zu beweisenden

SATZ 1. *Definiert $\varphi(t)=\Gamma(t)\zeta(t)$ das Produkt aus Eulerscher Gamma- und Riemannscher Zeta-Funktion und ist*

$$\mathrm{Re}(\nu)<\frac{1}{2}, \qquad |\arc x|<\pi,$$

so existiert mit dem hypergeometrischen Kern $F(t,\nu,1;x)$ der Grenzwert

$$\lim_{\omega\downarrow-1}\left\{\frac{(\omega+1)^{1-\nu}}{\log(\omega+1)}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\varphi(t)\varphi(1-t)F(t,\nu,1;x)\omega^{-t}dt\right\}=-\frac{2\pi i}{x^{\nu}},$$

wobei die Annäherung an $\omega=-1$ senkrecht aus der oberen komplexen ω-Halb-

1) Ein Teil der Vorarbeit leistete Herr Dr. G Maeß, Dtsch. Akad. Wiss, Berlin, in seiner Diplomschrift "Quadrantenfunktionen", Jena (1960).