J Math. Soc. Japan
Vol. 18, No. 3, 1966

Eine asymptotische Funktionalgleichung für eine Funktion eines ebenen Halbgitters

von Hans-Jürgen GLAESKE

(Eingegangen am 19 Juni, 1965)
(Verbessert am 14 März, 1966)

0. Einleitung:

In [3] wurde das Verhalten der von Maier in [12] eingeführten Halbgitterfunktion

$$(1) \qquad H(\omega\,;s)=\sum_{g=-\infty}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}(g+\omega h)^{-s}, \qquad \mathrm{Im}(\omega)>0,\ \sigma=\mathrm{Re}(s)>2$$

unter der speziellen Modultransformation $\omega'=-\omega^{-1}$ untersucht und durch Angabe einer *asymptotischen Funktionalgleichung* geklärt. Diese Funktion hat bekanntlich die reelle ω-Achse zur singulären Linie. Die analytische Fortsetzung bezüglich s gelingt durch Herleitung der für alle s konvergenten Lambertschen Reihe

$$(2) \qquad H(\omega\,;s)=\frac{(-2\pi i)^s}{\Gamma(s)}\sum_{k=1}^{\infty}k^{s-1}\frac{e^{2\pi ik\omega}}{1-e^{2\pi ik\omega}}, \qquad \mathrm{Im}(\omega)>0\,.$$

In [3] war nur eine solche Lambertsche Reihe Gegenstand der Untersuchung:

$$(3) \qquad L_{-s}(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-s}\frac{e^{2\pi ik\omega}}{1-e^{2\pi ik\omega}}, \qquad \mathrm{Im}(\omega)>0\,.$$

In Spezialfällen wurde die Lösung des Problems für die Funktion (3) schon bearbeitet. Für $s=0$ gab Wigert in [14] mit Hilfe der *Eulerschen Summenformel* eine asymptotische Funktionalgleichung an. In [11] gab Landau einen eleganten Beweis des Wigertschen Ergebnisses. In den Fällen $s\equiv 1\,(2)$ erhält man eine endliche Funktionalgleichung. Speziell ergibt sich für $s=1$ eine äquivalente Aussage zu der aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen bekannten *Transformationsformel*

$$(4) \qquad \eta(-\omega^{-1})=\sqrt{\frac{\omega}{i}}\,\eta(\omega)$$

für die elliptische Modulfunktion $\eta(\omega)$. Einen kurzen Beweis von (4) gab Siegel in [13]. Die entsprechende Formeln für $s\equiv 1\,(2)$ leitete Guinand in [5] mittels der *Fouriertransformation* her. Für $1<s\equiv 1\,(2)$ gibt Apostol mit