

Quelques remarques sur les groupes de Lie algébriques réels

Par Hideya MATSUMOTO

(Reçu le 3 juil., 1964)

Introduction

Dans un travail [11], I. Satake a associé à une algèbre de Lie semi-simple réelle un diagramme qui la caractérise à un isomorphisme près, que nous appellerons son diagramme de Satake. Le but principal de cet article est d'étudier au point de vue des diagrammes de Satake quelques questions plus ou moins connues sur les groupes algébriques linéaires réels. On traitera la connexion topologique d'un groupe algébrique irréductible, la structure du groupe des automorphismes d'une algèbre de Lie semi-simple et la question de conjugaison des sous-groupes résolubles maximaux et des sous-groupes de Cartan d'un groupe algébrique.

Au paragraphe 1, nous rappelons d'abord quelques résultats de [11] qui seront essentiels pour la suite de cet article. Nous envisageons ensuite la connexion topologique d'un groupe algébrique réel. On sait que tout groupe algébrique irréductible complexe est topologiquement connexe et que ce n'est pas toujours vrai pour les groupes algébriques irréductibles réels. Nous démontrons que tout groupe algébrique G irréductible réel est le produit semi-direct de la composante topologiquement connexe de l'élément neutre dans G par un sous-groupe fini composé d'éléments involutifs.

Le paragraphe 2 est consacré à l'étude des automorphismes d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} semi-simple réelle. Soient G le groupe des automorphismes de \mathfrak{g} et G^0 celui des automorphismes intérieurs de \mathfrak{g} . La structure du groupe quotient G/G^0 a été étudiée par E. Cartan [5] et, après lui, par d'autres auteurs (cf. S. Murakami [10], M. Takeuchi [14]). Nous donnons une méthode permettant de la déterminer à partir du diagramme de Satake de \mathfrak{g} , et démontrons incidemment, en utilisant la classification des algèbres de Lie simples, que G est le produit semi-direct de G^0 par un sous-groupe fini S , ce qui nous semble avoir été implicitement vérifié depuis E. Cartan [5]. Nous pouvons déterminer explicitement un pareil sous-groupe S pour chaque algèbre de Lie simple réelle.

Le paragraphe 3 est essentiellement relatif à la question de conjugaison