J. Math. Soc. Japan
Vol. 16, No. 2, 1964

Domaines pseudoconvexes infinis et la métrique riemannienne dans un espace projectif

Par Akira TAKEUCHI

(Reçu le 10 janv, 1964)

M. K. Oka [**6, 7**] a démontré l'inverse du théorème de Hartogs, disant que tout domaine pseudoconvexe, sans point critique intérieur, sur l'espace de n variables complexes est holomorphiquement convexe et qu'il est un domaine d'holomorphie. Dans son mémoire, il a introduit la notion de fonction pseudoconvexe et il a utilisé, d'une façon remarquable, une fonction pseudoconvexe obtenue dans un domaine pseudoconvexe à partir de la distance frontière euclidienne. D'autre part, de nombreux auteurs [par exemple **1**, **3**, **4**] ont étudié le problème de Levi, pour lequel on part de l'hypothèse de l'existence d'une fonction pseudoconvexe.

Dans le présent mémoire, nous allons construire, dans un domaine pseudoconvexe sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe, à partir de la distance à la frontière du domaine mesurée par la métrique projective, une fonction pseudoconvexe et montrer que la fonction pseudoconvexe ainsi construite possède des propriétés suffisantes pour résoudre le problème inverse de Hartogs. Ce dernier résultat a été obtenu par M[me] Fujita [**2**], indépendamment. Mais, sa méthode était assez différente de la nôtre. Comme notre résultat montre une propriété intéressante de la métrique projective, il ne serait pas inutile de rédiger ce mémoire.

§ 1. Préliminaires.

Nous expliquons ici quelques propriétés de la métrique riemannienne dans l'espace projectif complexe. Désignons par $\boldsymbol{P}$ un espace projectif complexe à n dimensions, et prenons un système de coordonnées homogènes $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ de $\boldsymbol{P}$. A chaque point de $\boldsymbol{P}$, il correspond, dans l'espace C^{n+1} de $n+1$ variables complexes $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$, une droite complexe passant par l'origine. Sur une hypersphère K; $|x_0|^2+|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2=1$, il correspond, à chaque point A de $\boldsymbol{P}$, un cercle γ_A de rayon 1. En restreignant la métrique euclidienne de C^{n+1}, on aura une métrique riemannienne sur K. En vertu de cette métrique de K, nous définissons la distance $d(A, B)$ de deux points A et B de $\boldsymbol{P}$ par:

(Λ) $\quad d(A, B) =$ *la plus petite distance de* γ_A *et* γ_B, *mesurée sur* K;