J. Math. Soc. Japan
Vol. 15, No. 3, 1963

Über die rationale Darstellbarkeit der Heckeschen Operatoren

von Mitsuya MORI

(Eingegangen am 27. Aug., 1962)
(Verbessert am 26. März, 1963)

§1. Es bezeichne Γ eine Fuchssche Gruppe, d.h. eine diskrete Untergruppe der speziellen linearen Gruppe $SL(2, \boldsymbol{R})$ 2. Grades im Körper $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen, für die, angesehen als eine Gruppe der gebrochen-linearen Transformationen einer oberen Halbebene $\mathfrak{H}$, der Quotientenraum $\mathfrak{H}/\Gamma$ ein endliches Maß hat. Die automorphen Funktionen zu Γ bilden einen Körper $\mathfrak{K}$ der algebraischen Funktionen einer Unbestimmten über dem Körper $\boldsymbol{C}$ der komplexen Zahlen, und die ganzen automorphen Formen fester Dimension zu Γ einen Vektorraum endlicher Dimension über $\boldsymbol{C}$, der sich als direkte Summe zweier Unterräumen, nämlich des Unterraums von den Spitzenformen und des von den Eisensteinschen Reihen schreiben läßt. Den Raum der Spitzenformen der Dimension -2κ zu Γ bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma)$. Die Heckeschen Operatoren für Γ bewirken auf $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma)$ als lineare Transformationen. In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß falls Γ eine Fuchssche Gruppe von dem sofort anzugebenden Typus ist, die oben genannten linearen Transformationen von $\mathfrak{S}_{2\kappa}(\Gamma)$ alle rational darstellbar sind.

Nun erklären wir den Typus von Γ, der in Rede stehen soll.

Es sei Φ eine indefinite Quaternionenalgebra über dem Körper $\boldsymbol{Q}$ der rationalen Zahlen mit der kanonischen Involution $\alpha \to \alpha'$. $N(\alpha) = \alpha\alpha'$ ist die Norm von α. $\mathfrak{o}$ sei eine maximale Ordnung von Φ, und $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{o}$. $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ bezeichne die Gruppe derjenigen Einheiten von $\mathfrak{o}$, deren Normen 1 sind, $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ die Gruppe derjenigen Elementen γ von $\Gamma_{\mathfrak{o}}$ mit $\gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$. Da Φ eine treue Darstellung durch reellen Matrizen 2. Grades hat, läßt sich $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ als eine Fuchssche Gruppe auffaßen. Wenn $\mathfrak{a}$ teilerfremd zur Diskriminante $d(\Phi)$ von Φ ist, so gilt $\mathfrak{a} = N\mathfrak{o}$ mit einem positiven ganzen N. Dann bezeichnen wir $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ mit $\Gamma_N(\mathfrak{o})$. Diese soll unsere Gruppe sein.

Wenn Φ Nullteiler enthält, ist Φ der volle Matrizenring $M_2(\boldsymbol{Q})$ 2. Grades über $\boldsymbol{Q}$. $\mathfrak{o}$ ist dann konjugiert zu der Ordnung $M_2(\boldsymbol{Z})$ aller Matrizen mit ganzen Koeffizienten, $\Gamma_N(\mathfrak{o})$ isomorph zur homogenen Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(N)$ der Stufe N. Man wird leicht einsehen, daß unsere späteren Untersuchungen durch Übergang zu den Konjugierten in keiner Weise beeinflußt werden. So bedeutet es keine wesentliche Einschränkung, daß wir im Falle