J. Math. Soc. Japan
Vol. 14, No. 4, 1962

Sur une généralisation de l'intégrale (E. R.) et un théorème général de l'intégration par parties

Par Hatsuo OKANO

(Reçu mai. 5, 1961)

Le théorème de l'intégration par parties joue un rôle important dans un nombre de domaines de l'analyse. Sous sa forme ordinaire, il s'énonce comme il suit:

(I) Si dans un intervalle $[a, b]$ la fonction $f(x)$ est sommable et la fonction $g(x)$ est absolument continue, la fonction $f(x)g(x)$ y est également sommable et, en posant $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, on a

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=F(b)g(b)-\int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

D'autre part, par rapport à l'intégrale $(E. R.)$, nous avons déja démontré le théorème suivant[1]:

(II) Si dans un intervalle $[a, b]$ la fonction $f(x)$ est intégrable $(E. R.)$ et la fonction $g(x)$ satisfait à la condition de Lipschitz d'ordre 1, la fonction $f(x)g(x)$ y est aussi intégrable $(E. R.)$ et, en posant $F(x)=(E. R.)\int_a^x f(t)\,dt$, on a

$$(E. R.)\int_a^b f(x)g(x)\,dx=F(b)g(b)-\int_a^b F(x)g'(x)\,dx,$$

où la dernière intégrale est lebesguienne.

Dans le présent travail, nous allons donner une forme générale pour l'intégration par parties qui comprend les énoncés (I) et (II) comme deux cas spéciaux.

Pour cela même, nous devons d'abord généraliser la notion de l'intégrale $(E. R.)$. Concernant cette généralisation, Prof. K. Kunugi a montré que la méthode de changement de la variable nous permet d'élargir la portée de l'intégration[2]. Dans la première moitié, nous la reconstruisons d'après la méthode qui est appropriée à la discussion suivante.

---

1) H. Okano, Sur les intégrales $(E. R.)$ et ses applications, Osaka Math. J., **11** (1959), 187-212.

2) K. Kunugi, Sur une généralisation de l'intégrale, Fundamental and Applied Aspects of Math., **1** (1959), 1-30, § 4.